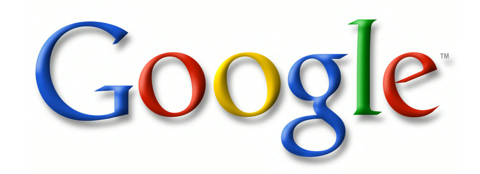
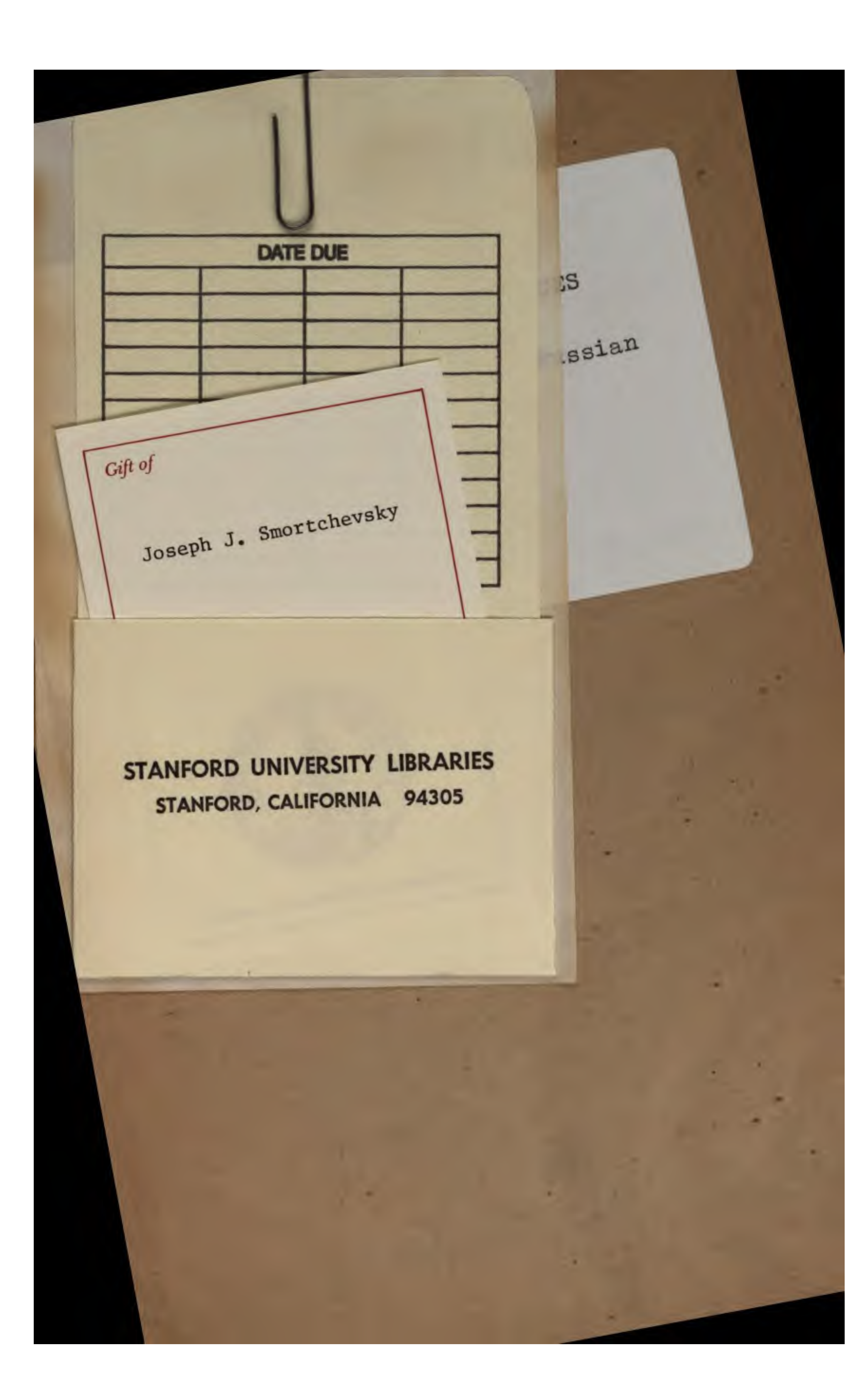
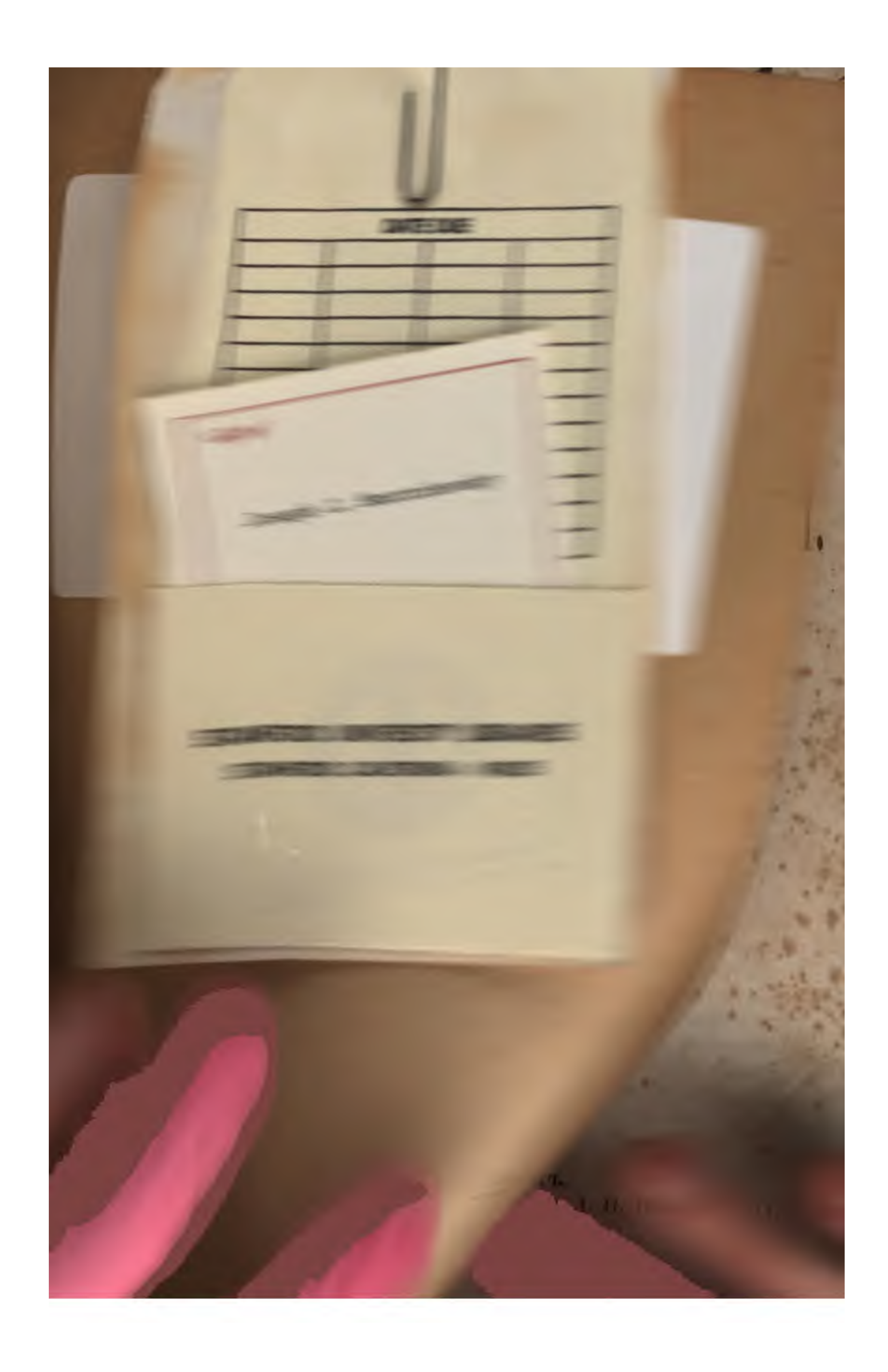





DATE DUE
Gift of
Joseph J. Smortchevsky
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305
..ssian



КУРСЪ
ТЕОРІИ
КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.

М. Тихомандрицкаго,

ординарнаго профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Харьковскаго Университета.



ХАРЬКОВЪ.
ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА Д. Н. ПОЛУЕХТОВА.
1890.

Печатано на основанiи постановленiя Физико-Математическаго Факультета Императорскаго Харьковскаго Университета.

Деканъ Факультета *П. Степановъ.*

31-го Августа 1889 г.
Харьковъ.

Харьковъ. Типографiя М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Сочиненій, спеціально посвященныхъ изложенію теоріи конечныхъ разностей, немного и въ иностранной математической литературѣ; поэтому и наша русская математическая литература, имѣющая „Лекціи разностнаго исчисленія“ профессора Ващенко-Захарченко (Кіевъ 1868), составленыя главнымъ образомъ по лучшему трактату разностнаго исчисленія англійскаго математика Георга Буля (A treatise on the calculus of finite differences by *George Boole*. Third edition. London. Macmillan and co. 1880) не можетъ назваться бѣдною; но я полагаю, что и предлагаемое мною сочиненіе не покажется лишнимъ особенно тѣмъ, кто, подобно мнѣ, предпочитаютъ оставаться на болѣе надежной почвѣ реальныхъ вычисленій, чѣмъ переходить на рискованную символическихъ вычисленій. Символизмъ, подкупающій въ началѣ краткостью своихъ вычисленій, при дальнѣйшемъ развитіи теоріи требуетъ множество дополнительныхъ разъясненій и теоремъ, отвлекающихъ читателя отъ сущности занимающаго вопроса разсмотрѣніемъ обстоятельствъ, относящихся не къ самому вопросу, но къ искуственному методу, употребленному для его рѣшенія, чрезъ что утрачивается главное достоинство этого метода—простота. Кромѣ того чтеніе символическихъ формулъ, какъ имѣющихъ лишь условный смыслъ, и силу въ извѣстныхъ предѣлахъ, съ извѣстными ограниченіями, требуетъ бóльшаго напряженія памяти и бóльшей потому привычки къ нимъ, еще также и потому, что символическія формулы, будучи лишь такъ сказать изображеніемъ настоящихъ формулъ, не могутъ сравниться по ясности вызываемыхъ ими представленій объ отношеніяхъ содержащихся въ нихъ величинъ съ дѣйствительными формулами, выражающими эти отношенія при помощи привычныхъ намъ знаковъ аналитическихъ операцій надъ величинами. Къ тому же результаты, полученные при помощи символическихъ операцій, кажутся намъ скорѣе отгаданными, чѣмъ доказанными. При помощи символическихъ операцій формулы получаются безъ остаточнаго члена, что представляетъ часто весьма существенный ихъ недостатокъ. По всему этому символическія формулы въ нашей книгѣ

даются только послѣ вывода настоящихъ формулъ въ томъ случаѣ, когда онѣ простотою внѣшняго вида и способа реализаціи содѣйствуютъ запоминанію настоящихъ формулъ.

Предлагаемая книга не есть трактатъ, написанный для ученыхъ и обязанный поэтому представлять избранную отрасль науки въ полномъ ея объемѣ, котораго она достигла въ эпоху предшествующую его составленію; такой трудъ мы оставляемъ людямъ болѣе насъ сильнымъ въ этой отрасли математическаго анализа, да притомъ едвали еще и время для него наступило у насъ на Руси; наше намѣреніе было— предложить учащимся такой курсъ, который содержалъ бы обстоятельное изложеніе тѣхъ статей изъ теоріи конечныхъ разностей, которыя уже давно перестали быть достояніемъ однихъ спеціалистовъ, съ прибавленіемъ тѣхъ, для которыхъ уже наступило время сдѣлаться общимъ достояніемъ математиковъ, каковы напримѣръ способъ параболическаго интерполированія, данный Ак. П. Л. Чебышевымъ въ Mémoire sur l'intérpolation par la methode des moindres carrées. S.-Petersbourg 1859, или остаточный членъ формулы Маклореня-Эйлера и функціи Бернулли, надъ изслѣдованіемъ которыхъ потрудились русскіе математики Остроградскій и В. Г. Имшенецкій.—Статьи теоріи конечныхъ разностей, небогатыя содержаніемъ, мало представляющія общаго, не включены въ нашъ курсъ; такъ что предлагаемый нами учащимся курсъ не далеко выходитъ за предѣлы экзаменныхъ требованій программъ Министерства Народнаго Просвѣщенія *), заканчиваясь интегрированіемъ системъ линейныхъ уравненій, какъ единственныхъ, которыхъ теорія хорошо разработана, и потому должна войти въ такой курсъ. Если несмотря на такое ограниченіе программы, книжка все таки вышла довольно объемистая, то это произошло оттого, что желаніе облегчить читателю изученіе этого курса, побудило меня входить въ такія подробности вычисленій, которыя можно было бы предоставить разобрать самому читателю при болѣе сжатомъ, но за то и менѣе легкомъ изложеніи. Съ тою же цѣлью облегченія усвоенія курса въ концѣ книги нами приложено нѣсколько примѣровъ для упражненія—главнымъ образомъ на интегрированіе разностныхъ уравненій,—заимствованныхъ изъ книги Буля.

На сколько въ стремленіи своемъ облегчить учащимся изученіе теоріи конечныхъ разностей я достигъ своей цѣли, не мнѣ судить; конечно, если бы долѣе поработать надъ этимъ курсомъ, то можно было бы предложить болѣе совершенный трудъ; но необходимость удѣлить время на разработку также и другихъ преподаваемыхъ мною курсовъ, за которою не скоро предвидится возможность заняться обработкою предлагаемаго, побудила меня приступить къ изданію того, что уже

---

*) Нетребуемое этими программами отчено звѣздочкою въ оглавленіи.

сдѣлано, чтобы не лишить учащихся и той помощи, которую можетъ оказать имъ моя книга и въ настоящемъ своемъ видѣ. Если окажется что я не ошибся въ этомъ, а также что моя книга хотя отчасти будетъ способствовать появленію въ будущемъ болѣе совершеннаго руководства по тому же предмету, то это будетъ лучшимъ вознагражденіемъ за мой трудъ.

Необходимость самому держать корректуру и притомъ спѣшить освобожденіемъ шрифта не мало способствовала наравнѣ съ другими обстоятельствами тому, что къ сожалѣнію эта книга является съ немалымъ числомъ опечатокъ, изъ которыхъ замѣченныя мною указаны въ концѣ книги; мы просимъ читателя во избѣжаніе недоразумѣній исправить ихъ передъ чтеніемъ книги согласно этимъ указаніямъ.

М. Тихомандрицкій.

Водяное,
14-го Іюля 1889 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Пусть u_x означаетъ нѣкоторую функцію независимаго перемѣннаго x; дадимъ этому независимому перемѣнному количеству x приращеніе h, которое предположимъ конечнымъ; тогда функція u_x получитъ приращеніе тоже конечное, равное разности измѣненнаго и первоначальнаго ея значеній:

$$u_{x+h} - u_x,$$

и потому называемое *конечною разностью* функціи u_x. Конечная разность обозначается при помощи знака Δ, поставленнаго предъ знакомъ функціи u_x, такимъ образомъ: Δu_x, такъ что, слѣд.

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x.$$

2. Разность *) функціи, будучи сама функціей, будетъ имѣть свою разность, которая по отношенію къ первоначальной функціи, будучи разностью отъ ея разности, называется *разностью 2-го порядка*, или короче *второю разностью*. Послѣднюю слѣдовало бы обозначить чрезъ $\Delta\Delta u_x$; но для краткости пишутъ вмѣсто этого $\Delta^2 u_x$, такъ что слѣд.

$$\Delta^2 u_x = \Delta\Delta u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x.$$

3. Разность 2-го порядка, какъ функція x, вообще будетъ имѣть свою разность, которая, какъ разность отъ разности 2-го порядка, по отношенію къ первоначальной функціи будетъ *разностью 3-го порядка* и обозначается чрезъ $\Delta^3 u_x$, такъ что слѣд.

$$\Delta^3 u_x = \Delta^2 u_{x+h} - \Delta^2 u_x.$$

*) Эпитетъ „конечная“ для краткости часто опускается, когда нѣтъ мѣста недоразумѣнію.

Продолжая эти разсужденія, дойдемъ до понятія о разности n-го порядка данной функціи, которая будетъ разность отъ разности $n-1$-го порядка и обозначается чрезъ $\Delta^n u_x$, такъ что слѣд.

$$\Delta^n u_x = \Delta^{n-1} u_{x+h} - \Delta^{n-1} u_x .$$

4. Предположимъ для перваго примѣра, что $u_x = x^2$, и что $h = 1$; тогда рядъ значеній независимой перемѣнной будетъ рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

а соотвѣтствующій рядъ значеній u_x будетъ рядъ квадратовъ натуральныхъ чиселъ:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

Напишемъ въ первомъ столбцѣ значенія x; во второмъ соотвѣтствующія значенія функціи u_x; въ третьемъ первыя разности, которыя получимъ, вычитая каждое число второго столбца изъ слѣдующаго числа его; въ четвертомъ вторыя разности, которыя получимъ, вычитая каждое число третьяго столбца изъ слѣдующаго числа его; у насъ эти числа окажутся равными 2; вслѣдствіе этого ихъ разности, которыя по отношенію къ самой функціи $u_x = x^2$ суть третьи разности, будутъ равны нулю. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть такую таблицу значеній независимой перемѣнной x, ея функціи $u_x = x^2$ и ея разностей:

x	$u_x = x^2$	Δx^2	$\Delta^2 x^2$	$\Delta^3 x^2$
0	0	1	2	0
1	1	3	2	0
2	4	5	2	0
3	9	7	2	0
4	16	9	2	
5	25	11		
6	36			

То обстоятельство, что вторая разность функціи x^2 есть постоянная величина, позволяетъ эту таблицу продолжить сколь угодно далеко при

помощи одного дѣйствія сложенія. Дѣйствительно, придавая къ функціи u_x ея разность Δu_x, мы будемъ имѣть u_{x+h}:

$$u_{x+h} = u_x + \Delta u_x,$$

какъ то слѣдуетъ изъ опредѣленія конечной разности функціи; потому, придавая 2 къ 11 мы получимъ слѣдующее число этого столбца, т. е. слѣдующее значеніе Δu_x, именно 13; придавая это число къ стоящему рядомъ числу 36 втораго столбца, получимъ слѣдующее число этого второго столбца, именно 49, которое есть квадратъ 7; придавая опять 2 къ 13, получимъ для Δx^2 значеніе 15, придавая его къ 49, получимъ для x^2 число $64 = 8^2$, и т. д.

5. Такимъ же образомъ составится слѣдующая таблица кубовъ натуральныхъ чиселъ и ихъ разностей:

x	$u_x = x^3$	Δx^3	$\Delta^2 x^3$	$\Delta^3 x^3$	$\Delta^4 x^3$
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	0
3	27	37	24	6	
4	64	61	30		
5	125	91			
6	216				

Здѣсь разность третьяго порядка есть постоянная величина, и слѣд. разность 4-го порядка есть нуль; поэтому опять можно съ помощію этой таблицы продолжать рядъ кубовъ натуральныхъ чиселъ какъ угодно далеко: прибавляя 6 къ 30, получимъ слѣдующее число этого столбца 36; прибавляя его къ стоящему слѣва отъ него числу 91, получимъ слѣдующее число этого столбца 127; прибавляя это число къ стоящему слѣва числу 216, получимъ слѣдующее число этого столбца 343, которое $= 7^3$. И т. д.

6. Подобныя таблицы можно составить для какой угодно функціи u_x отъ независимой перемѣнной x, получающей какое угодно постоянное конечное приращеніе h:

*

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$
x	u_x	$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x$	$\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x$
$x+h$	u_{x+h}	$\Delta u_{x+h} = u_{x+2h} - u_{x+h}$	$\Delta^2 u_{x+h} = \Delta u_{x+2h} - \Delta u_{x+h}$
$x+2h$	u_{x+2h}	$\Delta u_{x+2h} = u_{x+3h} - u_{x+2h}$	. . . .
$x+3h$	u_{x+3h}		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
$x+(n-1)h$	$u_{x+(n-1)h}$	$\Delta u_{x+(n-1)h} = u_{x+nh} - u_{x+(n-1)h}$	$\Delta^2 u_{x+(n-1)h} = \Delta u_{x+nh} - \Delta u_{x+(n-1)h}$
$x+nh$	u_{x+nh}	$\Delta u_{x+nh} = u_{x+(n+1)h} - u_{x+nh}$	
$x+(n-1)h$	$u_{x+(n+1)h}$		

Если окажется, что $\Delta^n u_x = C$ — постоянной, то таблица можетъ быть продолжена какъ угодно далеко. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\Delta^n u_x = C$ и по опредѣленію разности:

$$\Delta^{n-1} u_{x+h} = \Delta^{n-1} u_x + \Delta^n u_x,$$

то

$$\Delta^{n-1} u_{x+h} = \Delta^{n-1} u_x + C,$$

$$\Delta^{n-1} u_{x+2h} = \Delta^{n-1} u_{x+h} + C,$$

$$\Delta^{n-1} u_{x+3h} = \Delta^{n-1} u_{x+2h} + C,$$

и т. д.; затѣмъ найдутся:

$$\Delta^{n-2} u_{x+h} = \Delta^{n-2} u_x + \Delta^{n-1} u_x,$$

$$\Delta^{n-2} u_{x+2h} = \Delta^{n-2} u_{x+h} + \Delta^{n-1} u_{x+h},$$

и т. д. послѣ чего найдемъ;

$$\Delta^{n-3} u_{x+h} = \Delta^{n-3} u_x + \Delta^{n-2} u_x,$$

$$\Delta^{n-3} u_{x+2h} = \Delta^{n-3} u_{x+h} + \Delta^{n-2} u_{x+h},$$

и т. д. Продолжая это, дойдемъ наконецъ до

$$u_{x+(n+1)h} = u_{x+nh} + \Delta u_{x+nh},$$

$$u_{x+(n+2)h} = u_{x+(n+1)h} + \Delta u_{x+(n+1)h},$$

и т. д., гдѣ всѣ Δu_{x+nh}, $\Delta u_{x+(n+1)h}, \ldots$ извѣстны уже изъ предыдущихъ равенствъ.

7. Подобное обстоятельство всегда встрѣтится, когда u_x будетъ цѣлая функція отъ x степени n. Дѣйствительно можно показать, что въ этомъ случаѣ $\Delta^n u_x = C$, т. е. постоянной, и слѣд. $\Delta^{n+1} u_x = 0$. Пусть

$$u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

дадимъ x приращеніе h; будемъ имѣть:

$$u_{x+h} = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n =$$

$$= u_x + u'_x h + \frac{u''_x}{1.2} h^2 + \ldots + \frac{u^{(n)}_x}{n!} h^n,$$

гдѣ u'_x, $u''_x, \ldots u^{(n)}_x$, какъ послѣдовательныя производныя, отъ u_x, будутъ полиномы степеней $n-1$, $n-2, \ldots 0$ относительно x. Вычитая u_x, найдемъ:

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x = u'_x h + \frac{u''_x}{1.2} h^2 + \ldots + \frac{u^{(n)}_x}{n!} h^n,$$

что будетъ уже функція степени $n-1$ относительно x. Слѣд. первая разность полинома степени n есть полиномъ степени $n-1$, т. е. на единицу нисшей; потому вторая разность отъ того же полинома u_x будетъ полиномъ степени $n-2$, третья степени $n-3$, и т. д.; такъ какъ такимъ образомъ при переходѣ отъ разности какого либо порядка къ разности слѣдующаго порядка степень полинома уменьшается на единицу, то послѣ n разъ повторенной операціи взятія разности отъ полинома, степень его уменьшится до нуля; откуда и слѣдуетъ, что раз-

ность n-го порядка не будетъ содержать x, а будетъ постоянное количество, а слѣд. ея разность, т. е. разность $n+1$-го порядка даннаго полинома, будетъ равна нулю.

8. Для всѣхъ другихъ функцій, какъ алгебраическихъ, такъ и трансцендентныхъ, этого не будетъ: ни одна изъ разностей такихъ функцій не будетъ постоянною, какъ бы ни былъ великъ ея порядокъ. Но значенія такихъ функцій, за исключеніемъ раціональныхъ дробей, никогда, вообще говоря, и не могутъ быть вычислены точно; обыкновенно вычисляютъ лишь извѣстное число десятичныхъ знаковъ этихъ значеній; въ такомъ случаѣ и разности будутъ содержать тоже число десятичныхъ знаковъ, и можетъ случиться, что разность нѣкотораго порядка будетъ въ предѣлахъ удерживаемыхъ десятичныхъ знаковъ представлять все тоже самое десятичное число, пока x не выйдетъ изъ извѣстныхъ предѣловъ. Въ этомъ случаѣ изложенный способъ продолженія ряда значеній функціи съ помощію таблицы ея разностей примѣняется и къ такимъ функціямъ—пока x не выйдетъ изъ упомянутыхъ предѣловъ. Для того, чтобы не перейти этихъ предѣловъ, надобно вычислить значенія функціи для нѣкоторыхъ отдѣльно-стоящихъ значеній x съ помощію другихъ пріемовъ, напр. съ помощію рядовъ: имѣя такія значенія функціи и сличая ихъ съ вычисленными при помощи таблицы разностей, мы можемъ увидѣть, позволительно-ли считать въ разсматриваемыхъ предѣлахъ значеній x разность n-го порядка постоянною. Такъ пользуются разностями различныхъ порядковъ для вычисленія таблицъ логариѳмовъ и различныхъ другихъ функцій, а также астрономическихъ таблицъ. Но для этого надобно умѣть находить разности различныхъ порядковъ данной функціи и знать законы, которымъ они слѣдуютъ. Изслѣдованіе этихъ законовъ, равно какъ способы находить по данной функціи ея разности разныхъ порядковъ, а также рѣшеніе обратнаго вопроса: по данной разности найти саму функцію, и даже еще болѣе общаго вопроса: найти функцію по соотношенію между независимой перемѣнной, функціей и ея разностями различныхъ порядковъ, равно какъ и подобныхъ вопросовъ касательно функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ и составляетъ предметъ *теоріи конечныхъ разностей.*

ГЛАВА I.

Основныя теоремы; разности простѣйшихъ функцій.

9. 9. Въ теоріи конечныхъ разностей, какъ и въ дифференціальномъ исчисленіи, есть нѣсколько общихъ теоремъ, облегчающихъ отыскиваніе разностей. Такова

Теорема I. Придаточная постоянная исчезаетъ въ разности. Если

$$v_x = u_x + C,$$

то

$$\Delta v_x = \Delta u_x.$$

Дѣйствительно

$$\Delta v_x = v_{x+h} - v_x = u_{x+h} + C - (u_x + C) = u_{x+h} - u_x = \Delta u_x,$$

ибо C не измѣняется отъ измѣненія x на $x+h$. Это будетъ имѣть мѣсто не только тогда, когда C независитъ отъ x, но и тогда, когда C есть періодическая функція отъ x, періодъ которой есть h. Если напр.

$$C = \Sigma A_k \sin\left(2k\pi\frac{x}{h}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ A_k постоянныя въ обыкновенномъ смыслѣ, то есть величины независящія отъ x, и k цѣлыя числа, то, перемѣняя x на $x+h$, будемъ имѣть:

$$\Sigma A_k \sin\left(2k\pi\frac{x+h}{h}\right) = \Sigma A_k \sin\left(2k\pi\frac{x}{h} + 2k\pi\right) = \Sigma A_k \sin\left(2k\pi\frac{x}{h}\right) = C;$$

слѣд. если C опредѣляется формулою (a), то оно неизмѣняется при измѣненіи x на $x+h$, а потому имѣетъ характеръ постоянной, пока x

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$
x	u_x	$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x$	$\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+h} - \Delta u_x$
$x+h$	u_{x+h}	$\Delta u_{x+h} = u_{x+2h} - u_{x+h}$	$\Delta^2 u_{x+h} = \Delta u_{x+2h} - \Delta u_{x+h}$
$x+2h$	u_{x+2h}	$\Delta u_{x+2h} = u_{x+3h} - u_{x+2h}$	. . . .
$x+3h$	u_{x+3h}		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
. . . .	. . .		. . . .
$x+(n-1)h$	$u_{x+(n-1)h}$	$\Delta u_{x+(n-1)h} = u_{x+nh} - u_{x+(n-1)h}$	$\Delta^2 u_{x+(n-1)h} = \Delta u_{x+nh} - \Delta u_{x+(n-1)h}$
$x+nh$	u_{x+nh}	$\Delta u_{x+nh} = u_{x+(n+1)h} - u_{x+nh}$	
$x+(n-1)h$	$u_{x+(n+1)h}$		

Если окажется, что $\Delta^n u_x = C$ — постоянной, то таблица можетъ быть продолжена какъ угодно далеко. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\Delta^n u_x = C$ и по опредѣленію разности:

$$\Delta^{n-1} u_{x+h} = \Delta^{n-1} u_x + \Delta^n u_x,$$

то

$$\Delta^{n-1} u_{x+h} = \Delta^{n-1} u_x + C,$$

$$\Delta^{n-1} u_{x+2h} = \Delta^{n-1} u_{x+h} + C,$$

$$\Delta^{n-1} u_{x+3h} = \Delta^{n-1} u_{x+2h} + C,$$

и т. д; затѣмъ найдутся:

$$\Delta^{n-2} u_{x+h} = \Delta^{n-2} u_x + \Delta^{n-1} u_x,$$

$$\Delta^{n-2} u_{x+2h} = \Delta^{n-2} u_{x+h} + \Delta^{n-1} u_{x+h},$$

и т. д. послѣ чего найдемъ:

что и требовалось доказать. Очевидно это предложеніе справедливо и для высшихъ порядковъ разностей, такъ что вообще:

$$\Delta^m U_x = \Delta^m u_x + \Delta^m v_x - \Delta^m w_x .$$

10. Возьмемъ теперь разность отъ произведенія двухъ функцій: $u_x . v_x$. IV
По опредѣленію разности имѣемъ:

$$\Delta(u_x v_x) = u_{x+h} v_{x+h} - u_x v_x ; \tag{1}$$

но $u_{x+h} = u_x + \Delta u_x$; потому

$$\Delta(u_x v_x) = u_x (v_{x+h} - v_x) + v_{x+h} \Delta u_x ,$$

или, окончательно (ибо $v_{x+h} - v_x = \Delta v_x$):

$$\Delta(u_x v_x) = u_x \Delta v_x + v_{x+h} \Delta u_x . \tag{2}$$

Точно также, замѣчая, что $v_{x+h} = v_x + \Delta v_x$, получимъ изъ (1) и слѣдующую формулу:

$$\Delta(u_x v_x) = \Delta u_x . v_x + u_{x+h} \Delta v_x . \tag{3}$$

Возьмемъ теперь разность отъ обѣихъ частей по правилу, выражаемому этой формулой и помня теорему III; мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta^2(u_x v_x) &= \Delta(\Delta u_x . v_x) + \Delta(u_{x+h} \Delta v_x) = \\ &= \Delta^2 u_x . v_x + \Delta u_{x+h} . \Delta v_x + \\ &\quad + \Delta u_{x+h} \Delta v_x + u_{x+2h} \Delta^2 v_x , \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta^2(u_x v_x) = \Delta^2 u_x . v_x + 2\Delta u_{x+h} . \Delta v_x + u_{x+2h} \Delta^2 v_x . \tag{4}$$

Замѣчая аналогію съ квадратомъ бинома, эту формулу можно обобщить такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^n(u_x v_x) &= \Delta^n u_x . v_x + C_1^n \Delta^{n-1} u_{x+h} . \Delta v_x + C_2^n \Delta^{n-2} u_{x+2h} . \Delta^2 v_x + \\ &+ \ldots + C_m^n \Delta^{n-m} u_{x+mh} \Delta^m v_x + \ldots + u_{x+nh} \Delta^n v_x \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при h=1 будет: $\Delta\left[3^x \cdot \frac{x(x-1)}{2}\right] = 3^x \cdot x + \frac{(x+1)x}{2} \cdot 3^x \cdot 2 = \frac{x(x-1)}{2} 3^x \cdot 2 + 3^{x+1} \cdot x$;

$C_k = \frac{\cdots}{k!(n-k)!}$

см. стр. 23

гдѣ C_k^n обозначаетъ k-тый биноміальный коэффиціентъ, т. е. коэффиціентъ $k+1$-го члена бинома Ньютона.

Для доказательства вѣрности этой формулы для всякаго n, возьмемъ разность отъ обѣихъ частей ея, отъ каждаго члена второй—по формулѣ (3); мы будемъ имѣть:

$$\Delta^{n+1}(u_x v_x) = \Delta^{n+1} u_x \cdot v_x + \Delta^n u_{x+h} \cdot \Delta v_x +$$
$$+ C_1^n \Delta^n u_{x+h} \Delta v_x + C_1^n \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x +$$
$$+ C_2^n \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x + \dots$$
$$\dots + C_{m-1}^n \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x +$$
$$+ C_m^n \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x + C_m^n \Delta^{n-m} u_{x+\overline{m+1}h} \Delta^{m+1} v_x + \dots$$
$$\dots + \Delta u_{x+nh} \Delta^n v_x + u_{x+\overline{n+1}h} \Delta^n v_x;$$

или, соединяя сходственные члены на основаніи свойства биноміальныхъ коэффиціентовъ, выражаемаго формулою:

$$C_{m-1}^n + C_m^n = C_m^{n+1},$$

окончательно:

$$\Delta^{n+1}(u_x v_x) = \Delta^{n+1} u_x v_x + C_1^{n+1} \Delta^n u_{x+h} \Delta v_x + C_2^{n+1} \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x +$$
$$+ \dots + C_m^{n+1} \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x + \dots + u_{x+\overline{n+1}h} \Delta^{n+1} v_x,$$

что получается изъ (5) чрезъ перемѣну n на $n+1$, откуда слѣдуетъ, что формула (5) вѣрна для порядка $n+1$-го, какъ скоро она вѣрна для порядка n; но она вѣрна для $n=1$, для $n=2$, слѣд. вѣрна для всякаго n. Эта формула представляетъ полнѣйшую аналогію съ формулою Лейбница въ дифференціальномъ исчисленіи.

11. 11. Изъ предыдущаго легко вывести разность отъ дроби. Пусть

(1) $$y_x = \frac{u_x}{v_x};$$

отсюда имѣемъ:

2) $$y_x \cdot v_x = u_x;$$

взявъ разность отъ обѣихъ частей—отъ первой по формулѣ (3) пред. §, будемъ имѣть:

$$(3) \qquad y_x \Delta v_x + v_{x+h} \Delta y_x = \Delta u_x ;$$

отсюда

$$\Delta y_x = \frac{\Delta u_x - y_x \Delta v_x}{v_{x+h}} ,$$

или внося изъ (1) вмѣсто y_x его значеніе:

$$\Delta y_x = \frac{v_x \Delta u_x - u_x \Delta v_x}{v_x \cdot v_{x+h}} , \qquad (4)$$

формула аналогичная дифференціалу дроби. — Для полученія разности n-го порядка беремъ отъ (2) всѣ разности до этого порядка включительно по формулѣ (5) пред. §; получимъ систему уравненій вида:

$$y_x \Delta^m v_x + C_1^m \Delta^{m-1} v_{x+h} \Delta y_x + C_2^m \Delta^{m-2} v_{x+2h} \Delta^2 y_x +$$
$$+ \ldots + C_k^m \Delta^{m-k} v_{x+kh} \Delta^k y_x + \ldots + v_{x+mh} \Delta^m y_x = \Delta^m u_x ,$$

гдѣ послѣдовательно $m = 1 , 2 , 3 , \ldots n$; рѣшая эту систему уравненій и (2), получимъ на основаніи теоріи опредѣлителей:

$$\Delta^n y_x = \frac{1}{v_x \cdot v_{x+h}\, v_{x+2h} \cdots v_{x+nh}} \begin{vmatrix} v_x & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & u_x \\ \Delta v_x & v_{x+h} & 0 & 0 & \ldots 0 & \Delta u_x \\ \Delta^2 v_x & \Delta v_{x+h} & v_{x+2h} & 0 & \ldots 0 & \Delta^2 u_x \\ \Delta^3 v_x & \Delta^2 v_{x+h} & \Delta v_{x+2h} & v_{x+3h} & \ldots 0 & \Delta^3 u_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} v_x & \Delta^{n-2} v_{x+h} & \Delta^{n-3} v_{x+2h} & \Delta^{n-4} v_{x+3h} & \cdot\, \Delta v_{x+\overline{n-1}h} & \Delta^{n-1} u_x \\ \Delta^n v_x & \Delta^{n-1} v_{x+h} & \Delta^{n-2} v_{x+2h} & \Delta^{n-3} v_{x+3h} & \cdot\, \Delta v_{x+\overline{n-1}h} & \Delta^n u_x \end{vmatrix} \qquad (5)$$

формула, представляющая большую аналогію съ соотвѣтственной формулой дифференціальнаго исчисленія (см. Hoüel, Cours d'Analyse infinitésimal, t. I-er p. 225).

12. 12. Доказавъ общія теоремы, переходимъ къ разсмотрѣнію конечныхъ разностей различныхъ порядковъ простѣйшихъ функцій. Въ дифференціальномъ исчисленіи изъ алгебраическихъ функцій за простѣйшую принимаютъ степень независимой перемѣнной, производная которой опять будетъ степень помноженная на постоянную, именно на прежняго показателя; но уже первая разность степени будетъ не степень, а полиномъ, и слѣд. болѣе сложная функція, чѣмъ первоначальная. Дѣйствительно:

$$\Delta x^m = (x+h)^m - x^m =$$
$$= mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots + h^m .$$

Степени въ дифференціальномъ исчисленіи въ теоріи конечныхъ разностей отвѣчаетъ другая цѣлая функція—именно функція

$$x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h],$$ m множителей

состоящая изъ произведенія m множителей не равныхъ между собою, какъ въ степени, но образующихъ убывающую ариѳметическую прогрессію съ разностью h и первымъ членомъ x. Для этой функціи введено названіе *факторіэль* и особое обозначеніе аналогичное степени, именно

(1) $$x^{(m|h)} = x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h].$$

Если $h=1$, то факторіэль обозначается проще такъ:

(2) $$x^{(m)} = x(x-1)(x-2)\ldots[x-(m-1)].$$ $\frac{x!}{(x-m)!}$

Для $m=0$ условились принимать:

(3) $x^{(1/h)} = x$ $$x^{(0|h)} = 1,$$

(4) $$x^{(0)} = 1,$$

что необходимо замѣтить для дальнѣйшаго.

Отрицательнымъ степенямъ x будетъ соотвѣтствовать другая функція факторіэльная, именно:

(5) $$x^{(-m|h)} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

(6) $$x^{(-m)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots[x+(m-1)]},$$

что и требовалось доказать. Очевидно это предложеніе справедливо и для высшихъ порядковъ разностей, такъ что вообще:

$$\Delta^m U_x = \Delta^m u_x + \Delta^m v_x - \Delta^m w_x.$$

10.

10. Возьмемъ теперь разность отъ произведенія двухъ функцій: $u_x \cdot v_x$. IV
По опредѣленію разности имѣемъ:

$$\Delta(u_x v_x) = u_{x+h} v_{x+h} - u_x v_x; \tag{1}$$

но $u_{x+h} = u_x + \Delta u_x$; потому

$$\Delta(u_x v_x) = u_x (v_{x+h} - v_x) + v_{x+h} \Delta u_x,$$

или, окончательно (ибо $v_{x+h} - v_x = \Delta v_x$):

$$\Delta(u_x v_x) = u_x \Delta v_x + v_{x+h} \Delta u_x. \tag{2}$$

Точно также, замѣчая, что $v_{x+h} = v_x + \Delta v_x$, получимъ изъ (1) и слѣдующую формулу:

$$\Delta(u_x v_x) = \Delta u_x \cdot v_x + u_{x+h} \Delta v_x. \tag{3}$$

Возьмемъ теперь разность отъ обѣихъ частей по правилу, выражаемому этой формулой и помня теорему III; мы будемъ имѣть:

$$\Delta^2(u_x v_x) = \Delta(\Delta u_x \cdot v_x) + \Delta(u_{x+h} \Delta v_x) =$$
$$= \Delta^2 u_x \cdot v_x + \Delta u_{x+h} \cdot \Delta v_x +$$
$$+ \Delta u_{x+h} \Delta v_x + u_{x+2h} \Delta^2 v_x,$$

т. е.

$$\Delta^2(u_x v_x) = \Delta^2 u_x \cdot v_x + 2\Delta u_{x+h} \cdot \Delta v_x + u_{x+2h} \Delta^2 v_x. \tag{4}$$

Замѣчая аналогію съ квадратомъ бинома, эту формулу можно обобщить такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^n (u_x v_x) = \Delta^n u_x \cdot v_x + C_1^n \Delta^{n-1} u_{x+h} \cdot \Delta v_x + C_2^n \Delta^{n-2} u_{x+2h} \cdot \Delta^2 v_x + \\ \quad + \ldots + C_m^n \Delta^{n-m} u_{x+mh} \Delta^m v_x + \ldots + u_{x+nh} \Delta^n v_x \end{array}\right\} \tag{5}$$

при $h=1$ будетъ:

$$\Delta\left[3^x \cdot \frac{x(x-1)}{2}\right] = 3^x \cdot x + \frac{(x+1)x}{2} 3^x \cdot 2 = \frac{x(x-1)}{2} 3^x \cdot 2 + 3^{x+1} \cdot x;$$

$C_k = \frac{\dots}{k!(n-k)!}$

см. стр. 23

гдѣ C_k^n обозначаетъ k-тый биноміальный коэффиціентъ, т. е. коэффиціентъ $k+1$-го члена бинома Ньютона.

Для доказательства вѣрности этой формулы для всякаго n, возьмемъ разность отъ обѣихъ частей ея, отъ каждаго члена второй—по формулѣ (3); мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}(u_x v_x) = \Delta^{n+1} u_x \cdot v_x + \Delta^n u_{x+h} \cdot \Delta v_x + \\ + C_1^n \Delta^n u_{x+h} \Delta v_x + C_1^n \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x + \\ + C_2^n \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x + \dots \\ \dots + C_{m-1}^n \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x + \\ + C_m^n \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x + C_m^n \Delta^{n-m} u_{x+\overline{m+1}h} \Delta^{m+1} v_x + \dots \\ \dots + \Delta u_{x+nh} \Delta^n v_x + u_{x+\overline{n+1}h} \Delta^n v_x;\end{aligned}$$

или, соединяя сходственные члены на основаніи свойства биноміальныхъ коэффиціентовъ, выражаемаго формулою:

$$C_{m-1}^n + C_m^n = C_m^{n+1},$$

окончательно:

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}(u_x v_x) = \Delta^{n+1} u_x v_x + C_1^{n+1} \Delta^n u_{x+h} \Delta v_x + C_2^{n+1} \Delta^{n-1} u_{x+2h} \Delta^2 v_x + \\ + \dots + C_m^{n+1} \Delta^{n-m+1} u_{x+mh} \Delta^m v_x + \dots + u_{x+\overline{n+1}h} \Delta^{n+1} v_x,\end{aligned}$$

что получается изъ (5) чрезъ перемѣну n на $n+1$, откуда слѣдуетъ, что формула (5) вѣрна для порядка $n+1$-го, какъ скоро она вѣрна для порядка n; но она вѣрна для $n=1$, для $n=2$, слѣд. вѣрна для всякаго n. Эта формула представляетъ полнѣйшую аналогію съ формулою Лейбница въ дифференціальномъ исчисленіи.

V 11. 11. Изъ предыдущаго легко вывести разность отъ дроби. Пусть

(1) $$y_x = \frac{u_x}{v_x};$$

отсюда имѣемъ:

2) $$y_x \cdot v_x = u_x;$$

взявъ разность отъ обѣихъ частей—отъ первой по формулѣ (3) пред. §, будемъ имѣть:

(3) $$y_x\Delta v_x + v_{x+h}\,\Delta\, y_x = \Delta u_x\,;$$

отсюда

$$\Delta y_x = \frac{\Delta u_x - y_x\,\Delta v_x}{v_{x+h}}\,,$$

или внося изъ (1) вмѣсто y_x его значеніе:

$$\Delta y_x = \frac{v_x\,\Delta u_x - u_x\,\Delta v_x}{v_x\cdot v_{x+h}}\,, \tag{4}$$

формула аналогичная дифференціалу дроби. — Для полученія разности n-го порядка беремъ отъ (2) всѣ разности до этого порядка включительно по формулѣ (5) пред. §; получимъ систему уравненій вида:

$$y_x\,\Delta^m v_x + C_1^m\,\Delta^{m-1}\,v_{x+h}\,\Delta y_x + C_2^m\,\Delta^{m-2}\,v_{x+2h}\,\Delta^2 y_x +$$
$$+\ldots + C_k^m\,\Delta^{m-k}\,v_{x+kh}\,\Delta^k y_x + \ldots + v_{x+mh}\,\Delta^m y_x = \Delta^m u_x\,,$$

гдѣ послѣдовательно $m = 1\,,\;2\,,\;3\,,\ldots n$; рѣшая эту систему уравненій и (2), получимъ на основаніи теоріи опредѣлителей:

$$\Delta^n y_x = \frac{1}{v_x\cdot v_{x+h}\;v_{x+2h}\cdots v_{x+nh}}\begin{vmatrix} v_x & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & u_x \\ \Delta v_x & v_{x+h} & 0 & 0 & \ldots 0 & \Delta u_x \\ \Delta^2 v_x & \Delta v_{x+h} & v_{x+2h} & 0 & \ldots 0 & \Delta^2 u_x \\ \Delta^3 v_x & \Delta^2 v_{x+h} & \Delta v_{x+2h} & v_{x+3h} & \ldots 0 & \Delta^3 u_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} v_x & \Delta^{n-2} v_{x+h} & \Delta^{n-3} v_{x+2h} & \Delta^{n-4} v_{x+3h} & \cdot\;\Delta v_{x+\overline{n-1}h} & \Delta^{n-1} u_x \\ \Delta^n v_x & \Delta^{n-1} v_{x+h} & \Delta^{n-2} v_{x+2h} & \Delta^{n-3} v_{x+3h} & \cdot\;\Delta v_{x+\overline{n-1}h} & \Delta^n u_x \end{vmatrix} \quad (5$$

формула, представляющая большую аналогію съ соотвѣтственной формулой дифференціальнаго исчисленія (см. Hoüel, Cours d'Analyse infinitésimal, t. I-er p. 225).

12. Доказавъ общія теоремы, переходимъ къ разсмотрѣнію конечныхъ разностей различныхъ порядковъ простѣйшихъ функцій. Въ дифференціальномъ исчисленіи изъ алгебраическихъ функцій за простѣйшую принимаютъ степень независимой перемѣнной, производная которой опять будетъ степень помноженная на постоянную, именно на прежняго показателя; но уже первая разность степени будетъ не степень, а полиномъ, и слѣд. болѣе сложная функція, чѣмъ первоначальная. Дѣйствительно:

$$\Delta x^m = (x+h)^m - x^m =$$

$$= mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots + h^m .$$

Степени въ дифференціальномъ исчисленіи въ теоріи конечныхъ разностей отвѣчаетъ другая цѣлая функція—именно функція

$$x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h],$$

состоящая изъ произведенія множителей не равныхъ между собою, какъ въ степени, но образующихъ убывающую ариѳметическую прогрессію съ разностью h и первымъ членомъ x. Для этой функціи введено названіе *факторіэль* и особое обозначеніе аналогичное степени, именно

(1) $$x^{(m|h)} = x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h].$$

Если $h=1$, то факторіэль обозначается проще такъ:

(2) $$x^{(m)} = x(x-1)(x-2)\ldots[x-(m-1)].$$

Для $m=0$ условились принимать:

(3) $$x^{(0|h)} = 1,$$

(4) $$x^{(0)} = 1,$$

что необходимо замѣтить для дальнѣйшаго.

Отрицательнымъ степенямъ x будетъ соотвѣтствовать другая функція факторіэльная, именно:

(5) $$x^{(-m|h)} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

(6) $$x^{(-m)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots[x+(m-1)]},$$

числитель которой есть единица, а знаменатель произведеніе членовъ возрастающей ариѳметической прогрессіи, первый членъ которой есть x, а знаменатель h.

13. Найдемъ разность отъ положительнаго факторіэля $x^{(m|h)}$. По опредѣленію разности будемъ имѣть:

$$\Delta x^{(m|h)} = (x+h)\,x\,(x-h)\ldots[x-(m-2)h] -$$
$$- x(x-h)\,(x-2h)\ldots[x-(m-1)h] =$$
$$= x(x-h)\,(x-2h)\ldots[x-(m-2)h]\,\{x+h-[x-(m-1)h]\} =$$
$$= x(x-h)\,(x-2h)\ldots[x-(m-2)h]\,.\,mh\,;$$

т. е.

$$\Delta x^{(m|h)} = mhx^{(m-1|h)}, \tag{1}$$

— формула совершенно аналогичная дифференціалу степени.

14. По опредѣленію разности второго и высшихъ порядковъ и по II теоремѣ § 9 имѣемъ далѣе:

$$\Delta^2 x^{(m|h)} = m\,(m-1)\,h^2 x^{(m-2|h)}, \tag{2}$$

и вообще

$$\Delta^k x^{(m|h)} = m\,(m-1)\ldots(m-k+1)h^k x^{(m-k|h)}. \tag{3}$$

Такъ какъ факторіэль цѣлая функція x степени m, то по § 7 будетъ $\Delta^m x^{(m|h)}=$ постоянному, и дѣйствительно по формулѣ (3), полагая $k=m$, въ виду (3) § 12 мы будемъ имѣть:

$$\Delta^m x^{(m|h)} = m\,(m-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1\,h^m. \tag{4}$$

15. Подобнымъ образомъ для отрицательнаго факторіэля будемъ имѣть по опредѣленію разности:

$$\Delta x^{(-m|h)} = \frac{1}{(x+h)x(x+2h)\ldots(x+mh)} -$$
$$- \frac{1}{x(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+\overline{m-1}h)} =$$
$$= \frac{1}{(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+\overline{m-1}h)}\left\{\frac{1}{x+mh} - \frac{1}{x}\right\} =$$
$$= -\,mh\,\frac{1}{x(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+\overline{m-1}h)\,(x+mh)},$$

т. е.

$$(1)\qquad \triangle x^{(-m|h)} = -mhx^{(-m-1|h)},$$

— формула аналогичная дифференціалу отрицательной степени.

Беря разность отъ только-что полученнаго результата, будемъ имѣть:

$$(2)\qquad \triangle^2 x^{(m|h)} = m(m+1)h^2 x^{(m-2|h)},$$

и вообще

$$(3)\qquad \triangle^k x^{(m|h)} = (-1)^k m(m+1)\dots(m+\overline{k-1})h^k x^{(-m-k|h)}.$$

Эта формула, равно какъ и (3) предыдущаго §, написанныя обобщая полученныя выше результаты, докажутся по способу заключенія отъ n къ $n+1$.

16. Всякую цѣлую функцію x, или полиномъ, можно разложить по положительнымъ факторіэлямъ, и тогда легко найдутся разности его какого угодно порядка на основаніи теоремы III § 9 и формулъ § 14. Дѣйствительно, пусть:

$$(1)\qquad u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n;$$

можно положить:

$$(2)\qquad u_x = A_n x^{(n|h)} + A_{n-1} x^{(n-1|h)} + \dots A_1 x^{(1|h)} + A_0 x^{(0|h)};$$

въ самомъ дѣлѣ, если раскрыть факторіэли второй части и расположить результатъ по степенямъ x, то мы получимъ полиномъ степени n; сличая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ этомъ полиномѣ и въ данномъ, получимъ $n+1$ линейныхъ относительно коэффиціентовъ A_0, $A_1 \dots A_n$ уравненій такого вида: въ первое изъ нихъ войдетъ лишь A_n, во второе кромѣ того A_{n-1}, въ третье сверхъ этихъ A_{n-2}, и т. д. въ каждое уравненіе будетъ входить по новому неопредѣленному коэффиціенту, и наконецъ въ послѣднее войдутъ всѣ они до A_0 включительно; опредѣлитель такой системы уравненій, приводясь къ главному члену, не равенъ нулю; потому для A_0, $A_1 \dots A_n$ мы получимъ величины конечныя и опредѣленныя. Убѣдившись въ возможности такого разложенія даннаго полинома по факторіэлямъ, мы легко можемъ получить для коэффиціентовъ его простыя формулы. Для этого возьмемъ послѣдовательно всѣ разности отъ обѣихъ частей равенства (2) и въ каждомъ полученномъ равенствѣ положимъ затѣмъ $x=0$; тогда во второй части останется только одинъ членъ. Дѣйствительно, если

$a=0;\ h=1;\ f(x)=x^3;\ f(0)=0;\ \Delta f(0)=1;\ \Delta^2 f(0)=6;\ \Delta^3 f(0)=6;$

$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$

$a=0;\ h=1;\ f(x)=\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2.3\ldots n};\ \Delta^m f(0)=\frac{y(y-1)\ldots(y-n+m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)};$

$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{x}{1}\frac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{x(x-1)}{1.2}\frac{y(y-1)\ldots(y-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots$

возьмемъ разность порядка k, то всѣ члены начиная съ содержавшаго A_{k-1} и до послѣдняго, обратятся въ нули, ибо k— порядокъ разности выше степеней входящихъ въ эти члены факторіэлей; члены-же предшествующіе содержащему A_k, обратятся въ нуль, когда положимъ $x=0$ послѣ взятія ихъ разностей, ибо послѣднія всѣ будутъ содержать x множителемъ. Поэтому будемъ имѣть вообще такія равенства:

$$\triangle^m u_0 = A_m \,.\, m\,!\, h^m .$$

(гдѣ $m\,! = 1.2.3\ldots m$) откуда найдемъ:

$$A_m = \frac{\triangle^m u_0}{m\,!\, h^m}. \qquad (3)$$

$u_0 = u_0 = a_n$

Внося это для $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ (и принимая $\triangle^0 u_0 = u_0$) въ нашу формулу (2), которую мы для краткости напишемъ такъ:

$$u_x = \sum_{m=0}^{m=n} A_m x^{(m|h)}, \qquad (4)$$

мы будемъ имѣть искомое разложеніе полинома по факторіэлямъ:

$$u_x = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\triangle^m u_0}{m\,!\, h^m} x^{(m|h)}. \qquad (5)$$

17. Приложимъ эту общую формулу къ разложенію степени x^n, по факторіэлямъ: полагая въ ней $u_x = x^n$, мы будемъ имѣть:

$$x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\triangle^m 0^n}{m\,!\, h^m} x^{(m|h)}. \qquad (1)$$

Часто принимаютъ $h=1$; тогда эта формула принимаетъ такой видъ:

$$x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\triangle^m 0^n}{m\,!} x^{(m)}. \qquad (2)$$

Входящія въ эту послѣднюю формулу величины

$$\triangle^m 0^n \qquad (3)$$

при $x=a$: $f(a)=A_0$; $\Delta f(a) = hA_1$; $\Delta^2 f(a) = h^2 A_2$

$A_0 = f(a)$; $A_1 = \frac{1}{h}\Delta f(a)$; $A_2 = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f(a)$

$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \ldots \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{}\ \Delta^n f(a)$

называются *числами Бринклея*; входящія въ предыдущую формулу (1) отличны отъ нихъ; но частныя

$$(4)\qquad \frac{\Delta^m 0^n}{h^m}$$

тождественны имъ, какъ это мы увидимъ въ § 30, гдѣ будетъ данъ простой способъ для ихъ вычисленія.

18. Беря отъ (5) § 16 разность порядка k, будемъ имѣть:

$$(1)\qquad \Delta^k u_x = \sum_{m=k}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} m(m-h)\dots(m-\overline{k-1}h)h^k x^{(m-k|h)},$$

или сокращая:

$$(2)\qquad \Delta^k u_x = \sum_{m=k}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{(m-k)!\,h^{m-k}} x^{(m-k|h)},$$

формула, которая представляетъ разложеніе $\Delta^k u_x$ по факторіэлямъ по формулѣ (5) § 16, какъ и должно было ожидать.

Беря для примѣра разность отъ (1) § 17, будемъ имѣть:

$$(3)\qquad \Delta^k x^n = \sum_{m=k}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m-k)!\,h^{m-k}} x^{(m-k|h)},$$

а отъ (2):

$$(4)\qquad \Delta^k x^n = \sum_{m=k}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m-k)!} x^{(m-k)}$$

19. Разность отъ дробной функціи, когда знаменатель ея есть факторіэль, находится также легко, каковъ бы ни былъ порядокъ разности. Пусть дана функція

$$(1)\qquad v_x = \frac{u_x}{x^{(p|h)}}$$

гдѣ u_x полиномъ степени n. Разлагая его по факторіэлямъ съ помощію формулы (5) § 16, будемъ имѣть:

$$(2)\qquad v_x = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} \cdot \frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}}.$$

Если $p < n$, то въ этомъ разложеніи v_x встрѣтятся члены трехъ типовъ: перваго типа будутъ тѣ, для которыхъ $m < p$; второго одинъ членъ, для котораго $m = p$; и третьяго — тѣ, для которыхъ $m > p$: если $p > n$, то будутъ только члены третьяго типа; потому, чтобы имѣть дѣло съ членами всѣхъ трехъ типовъ, мы предположимъ $p < n$. Собирая въ отдѣльныя суммы члены каждаго типа, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} v_x = \sum_{m=0}^{m=p-1} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} \cdot \frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} + \\ + \frac{\Delta^p u_0}{p!\,h^p} + \\ + \sum_{m=p+1}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} \cdot \frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Легко видѣть, что по сокращеніи будетъ:

$$\frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} = \frac{1}{(x - mh)(x - \overline{m+1}h)\ldots(x - \overline{p-1}h)}, \qquad (4)$$

когда $m < p$, и

$$\frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} = (x - ph)(x - \overline{p+1}h)\ldots(x - \overline{m-1}h), \qquad (5)$$

когда $m > p$. Полагая въ (4)

$$x - \overline{p-1}h = y, \qquad (6)$$

мы будемъ имѣть

$$x = y + \overline{p-1}h,$$

и

$$x - mh = y + \overline{p - m - 1}h,$$

и слѣдовательно:

$$\frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} = \frac{1}{y(y+h)\ldots(y + \overline{p-m-1}h)} = y^{[-(p-m)|h]}; \qquad (7)$$

полагая въ (5)

$$x - ph = z, \qquad (8)$$

откуда

$$x = z + ph,$$

и слѣдовательно

$$x - \overline{m-1}h = z - \overline{m-p-1}h,$$

будемъ имѣть:

$$\frac{x^{(m|h)}}{x^{(p|h)}} = z(z-h)\ldots(z-\overline{m-p-1}h) = z^{(m-p|h)}. \tag{9}$$

Подставляя изъ (7) и (9) въ (3), мы дадимъ разложенію функціи v_x такой видъ:

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} v_x = & \sum_{m=0}^{m=p-1} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} y^{[-(p-m)|h]} + \\ & + \frac{\Delta^p u_0}{p!\,h^p} + \\ & + \sum_{m=p+1}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} z^{(m-p|h)}. \end{aligned} \right.$$

Такъ какъ $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, (ибо x, y, z различаются на постоянныя), то по формуламъ (3) § 14 и (3) § 15 получимъ отсюда:

$$\Delta^k v_x = \sum_{m=0}^{m=p-1} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} (-1)^k (p-m)(p-m+1)\ldots(p-m+k-1) h^k y^{[-(p-m+k)|k]} +$$

$$+ \sum_{m=p+k+1}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} (m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-k+1) h^k z^{(m-p-k|h)}. \text{*)}$$

Вносся сюда вмѣсто y и z ихъ значенія изъ (6) и (8), получимъ окончательно:

---

*) Изъ членовъ третьей суммы первые k будутъ имѣть разность k-го порядка $=0$, ибо ихъ степени ниже k.

$$\ldots = \sum_{m=0}^{m=p-1} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} (-1)^k (p-m)(p-m+1)\ldots(p-m+k-1) h^k (x-\overline{p-1}h)^{(-\overline{p-m+k}|h)} +$$
$$+ \sum_{m=p+k+1}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!\,h^m} (m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-k+1) h^k (x-ph)^{(m-p-k|h)}.$$

20. Если дана раціональная дробь, знаменатель которой не имѣетъ кратныхъ корней, то можно найти разность какого угодно порядка. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ разлагая дробь на простѣйшія, мы приведемъ ее къ суммѣ цѣлой функціи, которая въ частныхъ случаяхъ можетъ быть постоянной и даже нулемъ, и дробей вида:

$$\frac{A}{x-a},$$

отъ которыхъ легко взять разность любого порядка k. Дѣйствительно

$$\frac{A}{x-a} = A(x-a)^{(-1|h)}; \tag{1}$$

слѣдовательно по формулѣ (3) § 15:

$$\Delta^k\left(\frac{A}{x-a}\right) = (-1)^k A k!\, h^k (x-a)^{(-1-k|h)}. \tag{2}$$

Если же знаменатель будетъ содержать кратные множители, то разложеніе на частныя дроби не упроститъ дѣла. Дѣйствительно,

$$\Delta\left(\frac{A}{(x-a)^n}\right) = \frac{A}{(x-a+h)^n} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{A[(x-a)^n-(x-a+h)^n]}{(x-a)^n(x-a+h)^n} =$$
$$= -\frac{nAh}{[(x-a)(x-a+h)]^n}\left\{(x-a)^{n-1} + \frac{n-1}{2}h(x-a)^{n-2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n}\right\};$$

какъ видимъ уже первая разность такой дроби представляетъ дробь другого болѣе сложнаго типа. Въ этомъ случаѣ лучше числителя и знаменателя разложить по факторіэлямъ и брать затѣмъ разность отъ представленной въ такомъ видѣ дробной функціи по общимъ формуламъ для разностей отъ дроби, выведеннымъ въ § 11 [формулы (4) и (5)].

21. Легко найти первую разность отъ дроби, которой числитель есть постоянное, а знаменатель *функціональный факторіэль*, то есть состоитъ

изъ произведенія значеній функціи для значеній x, образующихъ возростающую (въ нашемъ случаѣ) ариѳметическую прогрессію съ разностью h, именно функціи:

$$(1) \qquad w_x = \frac{A}{v_x \cdot v_{x+h} \cdots v_{x+\overline{n-1}h}}.$$

Дѣйствительно,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta w_x &= \frac{A}{v_{x+h} v_{x+2h} \cdots v_{x+nh}} - \frac{A}{v_x \cdot v_{x+h} \cdots v_{x+\overline{n-1}h}} = \\ &= \frac{A}{v_{x+h} \cdot v_{x+2h} \cdots v_{x+\overline{n-1}h}} \left\{ \frac{1}{v_{x+nh}} - \frac{1}{v_x} \right\} = \\ &= - \frac{A}{v_x \cdot v_{x+h} \cdot v_{x+2h} \cdots v_{x+nh}} \left\{ v_{x+nh} - v_x \right\}. \end{aligned} \right.$$

Если $v_x = ax + b$, гдѣ a и b постоянныя, то

$$v_{x+nh} - v_x = a(x + nh) + b - (ax + b) = anh,$$

и потому въ такомъ случаѣ будетъ

$$(3) \qquad \Delta w_x = - \frac{nAah}{v_x v_{x+h} \cdots v_{x+nh}},$$

т. е. дробью того же типа; а потому и разности высшаго порядка будутъ того же типа, и чрезъ повторенное примѣненіе формулы (3) въ этомъ случаѣ мы легко дойдемъ до такой общей формулы:

$$(4) \qquad \Delta^k w_x = (-1)^k \frac{n(n+1) \dots (n+k-1) A a^k h^k}{v_x \cdot v_{x+h} \cdot v_{x+2h} \cdots v_{x+\overline{n+k-1}h}}.$$

22. Разности радикальныхъ функцій не представляются простыми формулами. Равнымъ образомъ только для небольшого числа трансцендентныхъ функцій имѣются простыя общія формулы для ихъ разностей. Простѣйшимъ образомъ выражаются разности какого либо порядка показательной функціи. По опредѣленію разности имѣемъ

$$(1) \qquad \Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1),$$

откуда видимъ, что для полученія разности функцій a^x надобно саму функцію умножить на постоянное количество $a^h - 1$. Такъ какъ постоянный множитель функціи въ ея разности сохраняется, то будетъ

$$\Delta^2 a^x = \Delta[a^x(a^h-1)] = (a^h-1)\Delta a^x = a^x(a^h-1)^2\,; \tag{2}$$

отсюда, обобщая, получаемъ такую формулу

$$\Delta^n a^x = a^x(a^h-1)^n, \tag{3}$$

которая докажется по способу заключенія отъ n къ $n+1$.

23. Возьмемъ теперь разность отъ $\log x$. По опредѣленію ея имѣемъ:

$$\Delta\log x = \log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right). \tag{1}$$

Разлагая въ послѣднемъ ея выраженіи $\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$ въ рядъ по степенямъ $\frac{h}{x}$, получимъ:

$$\Delta\log x = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots, \tag{2}$$

откуда видно, что при x очень большомъ и h достаточно маломъ съ достаточнымъ приближеніемъ можно принять

$$\Delta\log x = \frac{h}{x}. \tag{3}$$

Перемѣняя x на $x+h$ въ формулѣ нами полученной:

$$\Delta\log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \tag{4}$$

и вычитая ее изъ имѣющаго получиться такимъ образомъ результата, получимъ:

$$\Delta^2\log x = \log\left(\frac{(x+2h)x}{(x+h)^2}\right) \tag{5}$$

или, преобразуя и разлагая въ рядъ:

$$\Delta^2\log x = \log\left(1-\frac{h^2}{(x+h)^2}\right) = \left(\frac{h}{x+h}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x+h}\right)^4 + \ldots,$$

откуда видно, что при очень большомъ x и достаточно маломъ h можно вторую разность считать за нуль. На этомъ обстоятельствѣ основывается обыкновенный способъ отыскиванія логариѳмовъ чиселъ изъ

таблицъ при помощи „пропорціональныхъ частей“ (partes proportionales). Дѣйствительно, принимая въ (3) $h=1$, будемъ имѣть:

$$\log(x+1)-\log x=\frac{1}{x};$$

дѣля (3) на это послѣднее равенство, послѣ замѣны $\Delta\log x$ его значеніемъ будемъ имѣть:

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{\log(x+1)-\log x}=\frac{h}{1}, \tag{6}$$

или еще общнѣе, написавъ h' вмѣсто h въ (3) и дѣля новый результатъ на прежній:

$$\frac{\log(x+h')-\log x}{\log(x+h)-\log x}=\frac{h'}{h}. \tag{7}$$

Подобно тому, какъ мы получили формулу (5) можно послѣдовательно получить выраженія разностей 3-го, 4-го и т. д. порядковъ отъ $\log x$; но тѣмъ же способомъ можно получить и выраженіе разности какого либо порядка отъ $\log u_x$, гдѣ u_x какая угодно функція x, чрезъ рядъ послѣдовательныхъ значеній ея, что мы и сдѣлаемъ въ слѣдующемъ §.

24. Мы находимъ послѣдовательно:

$$\Delta\log u_x=\log(u_{x+h})-\log u_x=\log\left(\frac{u_{x+h}}{u_x}\right); \tag{1}$$

$$\Delta^2\log u_x=\log\left(\frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}}\right)-\log\left(\frac{u_{x+h}}{u_x}\right)=\log\left(\frac{u_{x+2h}\cdot u_x}{(u_{x+h})^2}\right); \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned}\Delta^3\log u_x&=\log\left(\frac{u_{x+3h}\cdot u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2}\right)-\log\left(\frac{u_{x+2h}\cdot u_x}{(u_{x+h})^2}\right)=\\&=\log\left(\frac{u_{x+3h}(u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3\cdot u_x}\right).\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Законъ выраженія разности $\log u_x$ различныхъ порядковъ чрезъ рядъ послѣдовательныхъ значеній функціи u_x уже достаточно обнаружился, чтобы можно было, обобщая, написать слѣдующую формулу:

$C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\Delta^n \log u_x = \log\left\{\frac{u_{x+nh}\cdot\left(u_{x+\overline{n-2}h}\right)^{C_2^n}\left(u_{x+\overline{n-4}h}\right)^{C_4^n}\ldots}{\left(u_{x+\overline{n-1}h}\right)^{C_1^n}\left(u_{x+\overline{n-3}h}\right)^{C_3^n}\ldots}\right\}, \qquad (4)$$

гдѣ C_k^n обозначаетъ k-ый биноміальный коэффиціентъ. Предыдущія формулы получаются изъ этой, полагая $n = 1, 2, 3$; остается слѣдовательно для доказательства этой формулы (4) показать, что она вѣрна для слѣдующаго порядка, т. е. $n+1$-го, если она вѣрна для n-го порядка. Для этого перемѣнимъ x на $x+h$ въ (4), что дастъ:

$$\Delta^n \log u_{x+h} = \log\left\{\frac{u_{x+\overline{n+1}h}\cdot\left(u_{x+\overline{n-1}h}\right)^{C_2^n}\left(u_{x+\overline{n-3}h}\right)^{C_4^n}\ldots}{\left(u_{x+nh}\right)^{C_1^n}\left(u_{x+\overline{n-2}h}\right)^{C_3^n}\ldots}\right\};$$

вычитая отсюда (4), получимъ:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log\left\{\frac{u_{x+\overline{n+1}h}\cdot\left(u_{x+\overline{n-1}h}\right)^{C_1^n+C_2^n}\left(u_{x+\overline{n-3}h}\right)^{C_3^n+C_4^n}\ldots}{\left(u_{x+nh}\right)^{1+C_1^n}\left(u_{x+\overline{n-2}h}\right)^{C_2^n+C_3^n}\ldots}\right\};$$

но

$$C_{k-1}^n + C_k^n = C_k^{n+1},$$

потому окончательно:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log\left\{\frac{u_{x+\overline{n+1}h}\cdot\left(u_{x+\overline{n-1}h}\right)^{C_2^{n+1}}\left(u_{x+\overline{n-3}h}\right)^{C_4^{n+1}}\ldots}{\left(u_{x+nh}\right)^{C_1^{n+1}}\left(u_{x+\overline{n-2}h}\right)^{C_3^{n+1}}\ldots}\right\},$$

— что получается изъ (4) чрезъ перемѣну n на $n+1$; слѣдовательно, формула (4) доказана.

25. Что касается до тригонометрическихъ функцій, то изъ нихъ только для разностей $\sin(ax+b)$ и $\cos(ax+b)$ имѣются простыя формулы для всякаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ по опредѣленію разностей

$$\Delta\sin(ax+b) = \sin(ax+ah+b) - \sin(ax+b) =$$

$$= 2\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)\sin\frac{ah}{2},$$

т. е.

$$\Delta\sin(ax+b) = 2\sin\frac{ah}{2}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right). \qquad (1)$$

Эта формула аналогична дифференціалу $\sin(ax+b)$, въ который и переходитъ при безконечно-маломъ h, ибо тогда $\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$ будетъ безконечно-мало отличаться отъ $\cos(ax+b)$, а $2\sin\frac{ah}{2}=ah.\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}$ на безконечно-малую высшаго порядка отъ $ah=adx$. Полученную формулу можно еще такъ представить:

(2) $$\triangle\sin(ax+b)=2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(ax+b+\frac{ah+\pi}{2}\right),$$

[ибо $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$]. Эта формула показываетъ, что разность отъ $\sin(ax+b)$ получится, когда дугѣ дадимъ приращеніе $\frac{ah+\pi}{2}$, и затѣмъ умножимъ результатъ на $2\sin\frac{ah}{2}$.

Такъ какъ постоянный множитель въ разности сохраняется, то беря отъ (2) послѣдовательныя разности по тому же правилу, приходимъ къ такой общей формулѣ:

(3) $$\triangle^n\sin(ax+b)=\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n\sin\left(ax+b+n\frac{ah+\pi}{2}\right).$$

26. Подобнымъ образомъ находимъ:

(1) $$\triangle\cos(ax+b)=-2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right);$$

или

(2) $$\triangle\cos(ax+b)=2\sin\frac{ah}{2}\cos\left(ax+b+\frac{ah+\pi}{2}\right),$$

[ибо $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$] и вообще:

(3) $$\triangle^n\cos(ax+b)=\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n\cos\left(ax+b+n\frac{ah+\pi}{2}\right).$$

27. Для $\operatorname{tg}(ax+b)$ и прочихъ тригонометрическихъ функцій и обратныхъ имъ круговыхъ, общихъ формулъ теорія конечныхъ разностей не пред-

лагаетъ по ихъ сложности, и потому въ случаѣ, когда разности такихъ функцій потребуется найти, надобно вычислять ихъ послѣдовательно, исходя изъ самаго опредѣленія разности. Такъ, напримѣръ, если $u_x = \operatorname{tg} x$, будемъ имѣть:

$$\Delta \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} h[1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+h)], \tag{1}$$

или

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{\sin h}{\cos x \cos(x+h)}, \tag{2}$$

— формула аналогичная дифференціалу $\operatorname{tg} x$, съ тою разницею, что въ знаменателѣ вмѣсто квадрата $\cos x$ входитъ его второй факторіалъ т. е. произведеніе на $\cos(x+h)$, и вмѣсто h его sin. — Вторая разность отъ $\operatorname{tg} x$ можетъ быть выражена, равно какъ и слѣдующія, чрезъ одинъ tg отъ ряда значеній дуги, разнящихся отъ x на кратное h. Дѣйствительно

$$\begin{aligned}\Delta^2 \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} h \Delta[\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}(x+h)] = \\ &= \operatorname{tg} h . [\operatorname{tg}(x+h) \operatorname{tg}(x+2h) - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+h)] = \\ &= \operatorname{tg} h \operatorname{tg}(x+h)[\operatorname{tg}(x+2h) - \operatorname{tg} x] = \\ &= \operatorname{tg} h \operatorname{tg}(2h) \operatorname{tg}(x+h)[1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+2h)] = \\ &= \operatorname{tg} h . \operatorname{tg}(2h)[\operatorname{tg}(x+h) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+h) \operatorname{tg}(x+2h)].\end{aligned}$$

Такъ можно идти и далѣе, но результаты будутъ получаться все сложнѣе и сложнѣе.

28. Еще приводимъ слѣдующія разности:

$$\left.\begin{aligned}\Delta \sec x &= \frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)} = \\ &= \frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta \operatorname{arctg} x &= \operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{h}{1+x(x+h)}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(ибо $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$); эта же формула получается изъ (4) чрезъ перемѣну n на $n+1$. Примѣняя формулу (4) къ функціи $\log u_x$ и соединяя сумму логариѳмовъ въ одинъ логариѳмъ, получимъ формулу (4) § 24.

30. Примѣняя эту формулу къ $u_x = x^m$, мы будемъ имѣть:

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^n x^m = (x+nh)^m - C_1^n (x+\overline{n-1}h)^m + C_2^n (x+\overline{n-2}h)^m - \ldots \\ \qquad + (-1)^k C_k^n (x+\overline{n-k}h)^m + \ldots + (-1)^n x^m . \end{array} \right.$$

Полагая здѣсь $x=0$, получимъ формулу для вычисленія тѣхъ чиселъ, которыя входятъ въ формулу (1) § 17. Легко видѣть, что h^m войдетъ тогда во всѣ члены общимъ множителемъ, (какъ нами было уже предварено въ томъ §), и мы будемъ имѣть, вынося его за скобки:

$$(2)\quad \Delta^n 0^m = h^m \{ n^m - C_1^n \overline{n-1}^m + C_2 \overline{n-2}^m - \ldots + (-1)^k C_k^n \overline{n-k}^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^m \} .$$

Если принять $h=1$, то эта формула обратится въ другую, — въ формулу для вычисленія *чиселъ Бринклея*, входящихъ въ формулу (2) того же §, именно:

$$(3)\quad \Delta^n 0^m = n^m - C_1^n \overline{n-1}^m + C_2^n \overline{n-2}^m - \ldots + (-1)^n C_k^n \overline{n-k}^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n .$$

Съ помощію этой формулы была вычислена англійскимъ математикомъ Морганомъ таблица этихъ чиселъ, которую читатель найдетъ на страницѣ 14. „Лекцій разностнаго исчисленія" проф. М. Е. Ващенко-Захарченко, Кіевъ 1868 г. 8° *).

31. Для образованія конечной разности n-го порядка какой либо функціи u_x намъ нужно имѣть $n+1$ послѣдовательныхъ ея значеній, какъ то видно изъ формулы (4) § 29; можно, наоборотъ $n+1$-ый членъ ряда послѣдовательныхъ значеній функціи выразить чрезъ начальное ея значеніе (или первый членъ этого ряда) и значенія ея разностей до n-го порядка включительно. Дѣйствительно, изъ опредѣленія разности слѣдуетъ что

$$(1)\qquad u_{x+h} = u_x + \Delta u_x ;$$

перемѣняя здѣсь x на $x+h$, получимъ:

$$(2)\qquad u_{x+2h} = u_{x+h} + \Delta u_{x+h} ;$$

на основаніи (1) и его разности, именно:

*) Также см. *Imschenetzky*. Sur la généralisation des fonctions de Jacques Bernoulli. St.-Petersbourg 1883. (Memoires de l'Academie des sciences de St.-Petersbourg. T. XXXI № 14, p. 14).

	0^0	0^1	0^2	0^3	0^4	0^5	0^6	0^7	0^8	0^9	0^{10}
Δ^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Δ^1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Δ^2			2	6	14	30	62	126	254	510	1022
Δ^3				6	36	150	540	1.806	5.796	18.150	55.980
Δ^4					24	240	1.560	8.400	40.824	164.230	818.520
Δ^5						120	1.800	16.800	126.000	834.120	5.103.000
Δ^6							720	15.120	191.520	1.905.120	16.435.440
Δ^7								5.040	141.120	2.328.480	29.635.200
Δ^8									40.320	1.451.520	30.240.000
Δ^9										362.880	16.329.600
Δ^{10}											3.628.800

Числа Бринкля.

(иб
мѣ
ня
0. з

(1)

I
сел
дет
пре

(2) △

I
фор
тог

(3) △

(
ком
стр
Зах
11. з
ції
то
да
зна
n-г
слѣ

(1)

пер

(2)

на

---

*)
St.-I
№ 1

$$\Delta u_{x+h} = \Delta u_x + \Delta^2 u_x, \tag{3}$$

мы можемъ (2) такъ представить:

$$u_{x+2h} = u_x + \Delta u_x + \\ + \Delta u_x + \Delta^2 u_x,$$

т. е.

$$u_{x+2h} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x. \tag{4}$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, и принимая во вниманіе (1), (3) и его разность, именно

$$\Delta^2 u_{x+h} = \Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x, \tag{5}$$

мы получимъ:

$$u_{x+3h} = u_{x+h} + 2\Delta u_{x+h} + \Delta^2 u_{x+h} = \\ = u_x + \Delta u_x + \\ + 2\Delta u_x + 2\Delta^2 u_x + \\ + \Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x$$

и соединяя сходственные члены:

$$u_{x+3h} = u_x + 3\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x. \tag{6}$$

Формулы (1), (4) и (6), напоминаютъ первую, вторую и третью степени бинома; обобщая замѣченный на этихъ трехъ выводахъ законъ, можемъ написать общую формулу:

$$u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \ldots + C_k^n \Delta^k u_x + \ldots + C_n^n \Delta^n u_x. \tag{7}$$

Для доказательства вѣрности ея для всякаго n перемѣняемъ x на $x+h$ и разбиваемъ затѣмъ каждый членъ на два по формулѣ:

$$\Delta^k u_{x+h} = \Delta^k u_x + \Delta^{k+1} u_x; \tag{8}$$

мы получимъ:

$$\begin{aligned}u_{x+\overline{n+1}h} = u_x + \Delta u_x &+ \\ + C_1^n \Delta u_x + C_1^n \Delta^2 u_x &+ \\ + C_2^n \Delta^2 u_x + C_2^n \Delta^3 u_x &+ \dots \\ \dots + C_{k-1}^n \Delta^k u_x &+ \\ + C_k^n \Delta^k u_x + C_k^n \Delta^{k+1} u_x + \dots &+ \\ + \dots\dots\dots + C_n^n \Delta^n u_x &+ C_n^n \Delta^{n+1} u_x ,\end{aligned}$$

или на основаніи равенствъ:

$$C_{k-1}^n + C_k^n = C_k^{n+1}; \quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1,$$

слѣдующее:

$$u_{x+\overline{n+1}h} = u_x + C_1^{n+1} \Delta u_x + C_2^{n+1} \Delta^2 u_x + \dots + C_n^{n+1} \Delta^n u_x + C_{n+1}^{n+1} \Delta^{n+1} u_x ,$$

что получается изъ (7) чрезъ перемѣну n на $n+1$. Такимъ образомъ формула наша, вѣрная для значеній $n=2$, $n=3$, будетъ вѣрна для всякаго значенія n.

32. 32. Формулы (4) § 29 и (7) предыдущаго могутъ быть короче представлены символически. Формула (7) § 31, если отдѣлить знакъ функціи u_x отъ операціоннаго символа Δ, можетъ быть такъ представлена:

$$u_{x+nh} = (1+\Delta)^n u_x . \tag{1}$$

Отсюда мы получимъ истинную формулу, соединяя Δ^k и u_x въ $\Delta^k u_x$ по раскрытіи ея по биному Ньютона, какъ будто-бы Δ было количество, и умноженіи каждаго члена на u_x. Для $n=1$ она обратится въ такую

$$u_x = (1+\Delta) u_x , \tag{2}$$

(что получимъ и прямо изъ (1) предыдущаго §, отдѣливъ u_x отъ Δ и вынеся u_x за скобки); эта формула говоритъ, что для полученія слѣдующаго значенія функціи u_x надобно эту функцію символически умножить на $1+\Delta$; для полученія формулы для слѣдующаго за симъ значенія надобно еще разъ помножить на $1+\Delta$, и продолжая это мы доходимъ

$=0;\ h=1;\ f(x)=c^x;\ c^m = 1 + m.(c-1) + \frac{m(m-1)}{1.2}(c-1)^2 + \dots +$

$f(x)=(1+t)^m;\ (1+t)^m = 1 + m.t + \frac{m(m-1)}{1.2} t^2 + \dots +$

$$\Delta u_{x+h} = \Delta u_x + \Delta^2 u_x\,, \tag{3}$$

мы можемъ (2) такъ представить:

$$u_{x+2h} = u_x + \Delta u_x +$$
$$+ \Delta u_x + \Delta^2 u_x\,,$$

т. е.

$$u_{x+2h} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x\,. \tag{4}$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, и принимая во вниманіе (1), (3) и его разность, именно

$$\Delta^2 u_{x+h} = \Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x\,, \tag{5}$$

мы получимъ:

$$u_{x+3h} = u_{x+h} + 2\Delta u_{x+h} + \Delta^2 u_{x+h} =$$
$$= u_x + \Delta u_x +$$
$$+ 2\Delta u_x + 2\Delta^2 u_x +$$
$$+ \Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x$$

и соединяя сходственные члены:

$$u_{x+3h} = u_x + 3\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x\,. \tag{6}$$

Формулы (1), (4) и (6), напоминаютъ первую, вторую и третью степени бинома; обобщая замѣченный на этихъ трехъ выводахъ законъ, можемъ написать общую формулу:

$$u_{x+nh} = u_x + C_1^n\,\Delta u_x + C_2^n\,\Delta^2 u_x + \ldots + C_k^n\,\Delta^k u_x + \ldots + C_n^n\,\Delta^n u_x\,. \tag{7}$$

Для доказательства вѣрности ея для всякаго n перемѣняемъ x на $x+h$ и разбиваемъ затѣмъ каждый членъ на два по формулѣ:

$$\Delta^k u_{x+h} = \Delta^k u_x + \Delta^{k+1} u_x\,; \tag{8}$$

мы получимъ:

$$u_{x+\overline{n+1}h}=u_x+\Delta u_x+$$
$$+C_1^n\Delta u_x+C_1^n\Delta^2 u_x+$$
$$+C_2^n\Delta^2 u_x+C_2^n\Delta^3 u_x+\dots$$
$$\dots+C_{k-1}^n\Delta^k u_x+$$
$$+C_k^n\;\Delta^k u_x+C_k^n\Delta^{k+1}u_x+\dots+$$
$$+\;.\;.\;.\;,\;.\;.\;.\;.\;.\;+C_n^n\Delta^n u_x+C_n^n\Delta^{n+1}u_x,$$

или на основаніи равенствъ:

$$C_{k-1}^n+C_k^n=C_k^{n+1};\quad C_n^n=C_{n+1}^{n+1}=1,$$

слѣдующее:

$$u_{x+\overline{n+1}h}=u_x+C_1^{n+1}\Delta u_x+C_2^{n+1}\Delta^2 u_x+\dots+C_n^{n+1}\Delta^n u_x+C_{n+1}^{n+1}\Delta^{n+1}u_x,$$

что получается изъ (7) чрезъ перемѣну n на $n+1$. Такимъ образомъ формула наша, вѣрная для значеній $n=2$, $n=3$, будетъ вѣрна для всякаго значенія n.

32. 32. Формулы (4) § 29 и (7) предыдущаго могутъ быть короче представлены символически. Формула (7) § 31, если отдѣлить знакъ функціи u_x отъ операціоннаго символа Δ, можетъ быть такъ представлена:

(1) $$u_{x+nh}=(1+\Delta)^n u_x.$$

Отсюда мы получимъ истинную формулу, соединяя Δ^k и u_x въ $\Delta^k u_x$ по раскрытіи ея по биному Ньютона, какъ будто-бы Δ было количество, и умноженіи каждаго члена на u_x. Для $n=1$ она обратится въ такую

(2) $$u_x=(1+\Delta)u_x,$$

(что получимъ и прямо изъ (1) предыдущаго §, отдѣливъ u_x отъ Δ и вынеся u_x за скобки); эта формула говоритъ, что для полученія слѣдующаго значенія функціи u_x надобно эту функцію символически умножить на $1+\Delta$; для полученія формулы для слѣдующаго за симъ значенія надобно еще разъ помножить на $1+\Delta$, и продолжая это мы доходимъ

$x=0;\ h=1;\ f(x)=c^x;\ c^m=1+m.(c-1)+\frac{m(m-1)}{1.2}(c-1)^2+\dots+$

$f(x)=(1+t)^m;\ (1+t)^m=1+m.t+\frac{m(m-1)}{1.2}t^2+\dots+$

Перемѣняя здѣсь n на k, а k на j, затѣмъ беря разности перваго порядка и порядка l, получимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\Delta u_{x+kh} = \Delta u_x + \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^2 u_{x+jh}, \qquad (2)$$

$$\Delta^l u_{x+kh} = \Delta^l u_x + \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^{l+1} u_{x+jh}. \qquad (3)$$

Внося изъ (2) въ тѣ члены (1), въ которыхъ $k \geqq 1$, мы будемъ имѣть:

$$u_{x+nh} = u_x + \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta u_x + \sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^2 u_{x+jh}; \qquad (4)$$

но въ первой суммѣ всѣ слагаемыя одинаковыя, именно равны Δu_x, а число ихъ n: потому будетъ:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta u_x = n \Delta u_x = C_1^n \Delta u_x; \qquad (5)$$

вторая же сумма двойная, будучи подробно выписана, такъ представится:

$$\begin{array}{l}
\Delta^2 u_x + \\
+ \Delta^2 u_x + \Delta^2 u_{x+h} + \\
+ \Delta^2 u_x + \Delta^2 u_{x+h} + \Delta^2 u_{x+2h} + \\
+ \Delta^2 u_x + \Delta^2 u_{x+h} + \Delta^2 u_{x+2h} + \Delta^2 u_{x+3h} + \\
+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \\
+ \Delta^2 u_x + \Delta^2 u_{x+h} + \Delta^2 u_{x+2h} + \Delta^2 u_{x+3h} + \ldots + \Delta^2 u_{x+\overline{n-2}h}:
\end{array}$$

здѣсь каждая строчка, начиная со второй, представляетъ

$$\sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^2 u_{x+jh}$$

поочереди для $k=1$, затѣмъ $k=2$, $k=3$, и т. д., наконецъ для $k=n-1$. Если мы теперь будемъ суммировать по столбцамъ, то мы можемъ нашу сумму такъ представить:

$$\sum_{j=0}^{j=n-2}\sum_{k=j+1}^{k=n-1}\Delta^2 u_{x+jh};$$

ибо въ каждомъ столбцѣ столько первыхъ слагаемыхъ нехватаетъ, сколько единицъ въ числѣ j, коэффиціентѣ при h въ значеніи перемѣнной x въ этомъ столбцѣ. Слѣдовательно имѣемъ:

(6) $$\sum_{k=1}^{k=n-1}\sum_{j=0}^{j=k-1}\Delta^2 u_{x+jh}=\sum_{j=0}^{j=n-2}\sum_{k=j+1}^{k=n-1}\Delta^2 u_{x+jh};$$

но въ виду одинаковости слагаемыхъ

$$\sum_{k=j+1}^{k=n-1}\Delta^2 u_{x+jh}=(n-1-j)\Delta^2 u_{x+jh}=C_1^{n-1-j}\Delta^2 u_{x+jh};$$

а потому окончательно:

(7) $$\sum_{k=1}^{k=n-1}\sum_{j=0}^{j=k-1}\Delta^2 u_{x+jh}=\sum_{j=0}^{j=n-2}C_1^{n-1-j}\Delta^2 u_{x+jh}.$$

Внося это, а также и изъ (5) въ (4), мы получимъ (перемѣнивъ еще j на k):

(8) $$u_{x+nh}=u_x+C_1^n\Delta u_x+\sum_{k=0}^{k=n-2}C_1^{n-1-k}\Delta^2 u_{x+kh}.$$

Преобразуя тѣ члены суммы, въ которыхъ $k\geqq 1$, съ помощію формулы (3) для $l=2$, мы получимъ отсюда:

(9) $$\left\{\begin{aligned} u_{x+nh}=u_x+C_1^n\Delta u_x+\sum_{k=0}^{k=n-2}C_1^{n-1-k}\Delta^2 u_x+\\ +\sum_{k=1}^{k=n-2}C_1^{n-1-k}\sum_{j=0}^{j=k-1}\Delta^3 u_{x+jh};\end{aligned}\right.$$

но

(10) $$\sum_{k=0}^{k=n-2}C_1^{n-1-k}\Delta^2 u_x=\left(\sum_{k=0}^{k=n-2}C_1^{n-1-k}\right)\Delta^2 u_x;$$

далѣе, какъ и выше, убѣдимся, что

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=n-2} C_1^{n-1-k} \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^2 u_{x+jh} = \sum_{k=1}^{k=n-2} \sum_{j=0}^{j=k-1} C_1^{n-1-k} \Delta^2 u_{x+jh} = \\ = \sum_{j=0}^{j=n-3} \sum_{k=j+1}^{k=n-2} C_1^{n-1-k} \Delta^2 u_{x+jh} = \sum_{j=0}^{j=n-3} \left(\sum_{k=j+1}^{k=n-2} C_1^{n-1-k}\right) \Delta^2 u_{x+jh}.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Остается въ (10) и (11) найти суммы:

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} C_1^{n-1-k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=j+1}^{k=n-2} C_1^{n-1-k}; \quad (12)$$

ихъ мы найдемъ по болѣе общей формулѣ, къ выводу которой теперь и переходимъ.

35 35. Мы имѣемъ:

$$C_p^q + C_{p+1}^q = C_{p+1}^{q+1}; \text{ *)} \quad (1)$$

отсюда

$$C_p^q = C_{p+1}^{q+1} - C_{p+1}^q; \quad (2)$$

суммируя по q отъ p до r, получимъ:

$$\sum_{q=p}^{q=r} C_p^q = \sum_{q=p}^{q=r} C_{p+1}^{q+1} - \sum_{q=p}^{q=r} C_{p+1}^q = C_{p+1}^{r+1} - C_{p+1}^p,$$

производя сокращеніе одинаковыхъ членовъ обѣихъ суммъ; но $C_{p+1}^p = 0$, а потому окончательно находимъ:

$$\sum_{q=p}^{q=r} C_p^q = C_{p+1}^{r+1}. \quad (3)$$

По этой формулѣ мы и найдемъ суммы (12) пред. §. Дѣйствительно, если положить $n-1-k=q$ и перемѣнить порядокъ предѣловъ, то будетъ

*) Ибо $C_{p+1}^q = C_p^q \frac{q-p}{p+1}$.

(4) $$\sum_{k=0}^{k=n-2} C_1^{n-1-k} = \sum_{q=1}^{q=n-1} C_1^q = C_2^n;$$

и

(5) $$\sum_{k=j+1}^{k=n-2} C_1^{n-1-k} = \sum_{q=1}^{q=n-2-j} C_1^q = C_2^{n-1-j}$$

внеся это соответственно въ (10) и (11), затѣмъ оттуда въ (9) пред. §, получимъ (перемѣняя еще j на k):

(6) $$u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \sum_{k=0}^{k=n-3} C_2^{n-1-k} \Delta^3 u_{x+kh}.$$

36 36. Теперь законъ уже достаточно обнаружился, чтобы можно было написать общую формулу:

(1) $$\begin{cases} u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \dots + C_{m-1}^n \Delta^{m-1} u_x + \\ + \sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \Delta^m u_{x+kh}; \end{cases}$$

покажемъ, что если преобразовать послѣдній членъ — остаточный (содержащій сумму) съ помощію формулы (3) § 34, то получится еще одинъ членъ того же самого вида, именно $C_m^n \Delta^m u_x$, и остатокъ опять того же вида какъ и въ (1), получаемый изъ него чрезъ перемѣну m на $m+1$. Дѣйствительно по (3) § 34 имѣемъ для $k \geqq 1$:

(2) $$\Delta^m u_{x+kh} = \Delta^m u_x + \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^{m+1} u_{x+jh},$$

слѣд.

(3) $$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \Delta^m u_{x+kh} = \sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \Delta^m u_x + \\ + \sum\limits_{k=1}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \sum\limits_{j=0}^{j=k-1} \Delta^{m+1} u_{x+jh}; \end{cases}$$

или подобно тому, какъ и выше:

$$\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^m u_{x+kh} = \sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^m u_x + \sum_{j=0}^{j=n-m-1}\ \sum_{k=j+1}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^{m+1} u_{x+jh}. \quad (4)$$

Но по формулѣ (5) § 35, полагая $n-1-k=q$ и мѣняя порядокъ предѣловъ, имѣемъ:

$$\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} = \sum_{q=m-1}^{q=n-1} C_{m-1}^{q} = C_m^n\,; \quad (5)$$

$$\sum_{k=j+1}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} = \sum_{q=m-1}^{q=n-2-j} C_{m-1}^{q} = C_m^{n-1-j}\,; \quad (6)$$

подставляя изъ послѣднихъ двухъ равенствъ въ (4), получимъ (перемѣнивъ j на k):

$$\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^m u_{x+kh} = C_m^n\Delta^m u_x + \sum_{k=0}^{k=n-m-1} C_m^{n-1-k}\Delta^{m+1} u_{x+kh}\,; \quad (7)$$

если это вставить въ (1), то получимъ въ ней еще одинъ членъ и остатокъ, получающіеся, какъ сказано, соотвѣтственно изъ послѣдняго члена этой формулы и ея остатка чрезъ перемѣну m на $m+1$. Итакъ формула (I) вѣрна для всякаго m.

Пусть теперь:

$$\mathfrak{M} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^m u_{x+kh}}{\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}} \quad (8)$$

— это будетъ количество по величинѣ своей среднее между наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній

$$\Delta^m u_x,\ \Delta^m u_{x+h},\ \Delta^m u_{x+2h} \ldots \Delta^m u_{x+(n-m)h} \quad (9)$$

Изъ (8), такъ какъ по (3) § 35 имѣемъ:

(10) $$\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} = \sum_{q=m-1}^{q=n-1} C_{m-1}^{q} = C_m^n,$$

мы получимъ:

(11) $$\sum_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \Delta^m u_{x+kh} = C_m^n \mathfrak{M};$$

внеся это въ (1), получимъ окончательно такую формулу, которую и желали вывести:

(12) $$u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \dots + C_{m-1}^n \Delta^{m-1} u_x + C_m^n \mathfrak{M},$$

гдѣ $\mathfrak{M}$ опредѣляется формулою (8) и представляетъ—повторяемъ, количество среднее по величинѣ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній (9) разности $\Delta^m u_x$.—Этотъ выводъ, принадлежащій г-ну Caqué, сообщенъ Serret въ прибавленіи къ 6-ому изданію Lacroix, Traité élementaire du calcul differentiel et du calcul intégral. Paris 1862. pp. 230—236.

37. Въ виду важности этой формулы даемъ еще другой выводъ ея, принадлежащій г-ну Picart и сообщенный имъ въ Nouvelles annales des mathématiques. 2-me Série 1874, v. 13, p. 15: Série de Taylor — съ нѣкоторымъ однако измѣненіемъ.

Формулу (7) § 31, можно такъ написать:

(1) $$u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \dots + C_{m-1}^n \Delta^{m-1} u_x + R_m,$$

гдѣ остатокъ

(2) $$R_m = C_m^n \Delta^m u_x + C_{m+1}^n \Delta^{m+1} u_x + \dots + C_n^n \Delta^n u_n;$$

(преобразуемъ теперь этотъ остатокъ при помощи формулы (4) § 29. По этой формулѣ мы будемъ имѣть:

$\Delta^m u_x = \Delta^n u_x$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta^{m+1}u_x=\Delta^m u_{x+h}-\Delta^m u_x\\
&\Delta^{m+2}u_x=\Delta^m u_{x+2h}-2\Delta^m u_{x+h}+\Delta^m u_x\\
&\Delta^{m+3}u_x=\Delta^m u_{x+3h}-3\Delta^m u_{x+2h}+3\Delta^m u_{x+h}-\Delta^m u_x\\
&\Delta^{m+k}u_x=\Delta^m u_{x+kh}-C_1^k\,\Delta^m u_{x+\overline{k-1}h}+C_2^k\,\Delta^m u_{x+\overline{k-2}h}+\ldots+(-1)^k\Delta^m u_x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^n u_x=\Delta^m u_{x+\overline{n-m}h}-C_1^{n-m}\Delta^m u_{x+\overline{n-m-1}h}+C_2^{n-m}\Delta^m u_{x+\overline{n-m-2}h}+\ldots\\
&\qquad\ldots+(-1)^{n-m}C_{n-m}^{n-m}\Delta^m u_x;
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

вставляя это въ (2) и располагая по разностямъ отъ u_{x+kh}, мы будемъ имѣть:

$$
\left.\begin{aligned}
R_m=&\Delta^m u_x\{C_m^n-C_{m+1}^n+C_{m+2}^n-C_{m+3}^n+\ldots+(-1)^{n-m}C_n^n\}+\\
&+\Delta^m u_{x+h}\{C_{m+1}^n-2C_{m+2}^n+3C_{m+3}^n+\ldots+(-1)^{n-m-1}C_{n-m-1}^{n-m}C_n^n\}+\\
&+\Delta^m u_{x+2h}\{C_{m+2}^n-3C_{m+3}^n+6C_{m+4}^n-\ldots+(-1)^{n-m-2}C_{n-m-2}^{n-m}C_n^n\}+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+\Delta^m u_{x+kh}\{C_{m+k}^n-C_1^{k+1}C_{m+k+1}^n+C_2^{k+2}C_{m+k+2}^n-\ldots+(-1)^{n-m-k}C_{n-m-k}^{n-m}C_n^n\}+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+\Delta^m u_{x+\overline{n-m}h}\{C_n^n\}=\\
&=C_{m-1}^{n-1}\Delta^m u_x+C_{m-1}^{n-2}\Delta^m u_{x+h}+C_{m-1}^{n-3}\Delta^m u_{x+2h}+\ldots+C_{m-1}^{m-1}\Delta^m u_{x+\overline{n-m}h}=\\
&=\sum_{j=0}^{j=n-m}C_{m-1}^{n-1-j}\Delta^m u_{x+jh}
\end{aligned}\right\}(4)
$$

ибо

$$C_{m-1}^{n-1}=C_m^n-C_{m+1}^n+C_{m+2}^n-C_{m+3}^n+\ldots+(-1)^{n-m}C_n^n; \qquad (5)$$

$$C_{m-1}^{n-2}=C_{m+1}^n-2C_{m+2}^n+3C_{m+3}^n-\ldots+(-1)^{n-m-1}C_{n-m-1}^{n-m}C_n^n; \qquad (6)$$

$$C_{m-1}^{n-3}=C_{m+2}^n-3C_{m+3}^n+6C_{m+3}^n-\ldots+(-1)^{n-m-2}C_{n-m-2}^{n-m}C_n^n; \qquad (7)$$

. . . .

$$C_{m-1}^{n-k-1}=C_{m+k}^n-C_1^{k+1}C_{m+k+1}^n+C_2^{k+2}C_{m+k+2}^n-\ldots+(-1)^{n-m-k}C_{n-m-k}^{n-m}C_n^n; \qquad (8)$$

. . . .

Первая изъ этихъ формулъ такъ получится: мы имѣемъ вообще (изъ (1) § 35):

(9) $$C_{p-1}^{n-1} = C_p^n - C_p^{n-1};$$

полагая здѣсь $p = m,\ m+1,\ m+2, \ldots n-1$, мы получимъ такой рядъ равенствъ:

$$C_{m-1}^{n-1} = C_m^n - C_m^{n-1};$$

$$C_m^{n-1} = C_{m+1}^n - C_{m+1}^{n-1};$$

$$C_{m+1}^{n-1} = C_{m+2}^n - C_{m+2}^{n-1}; \ldots$$

$$C_{m+2}^{n-1} = C_{m+3}^n - C_{m+3}^{n-1};$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_{n-3}^{n-1} = C_{n-2}^n - C_{n-2}^{n-1};$$

$$C_{n-2}^{n-1} = C_{n-1}^n - C_{n-1}^{n-1};$$

подставляя изъ послѣдняго въ предпослѣднее, оттуда въ предпредпослѣднее и т. д., наконецъ изъ второго въ первое, мы получимъ равенство (5):

(10) $$C_{m-1}^{n-1} = C_m^n - C_{m+1}^n + C_{m+2}^n - C_{m+3}^n + \ldots + (-1)^{n-m} C_n^n,$$

ибо $C_n^n = C_{n-1}^{n-1}$. Перемѣняя здѣсь n на $n-1$, мы получимъ:

$$C_{m-1}^{n-2} = C_m^{n-1} - C_{m+1}^{n-1} + C_{m+2}^{n-1} - C_{m+3}^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-m-1} C_{n-1}^{n-1};$$

замѣняя каждый членъ его разложеніемъ по формулѣ (5), мы получимъ, помѣщая это разложеніе каждаго члена въ отдѣльную строчку, слѣдующее:

$$\begin{aligned} C_{m-1}^{n-2} = C_{m+1}^n - C_{m+2}^n + C_{m+3}^n - C_{m+4}^n + \ldots + (-1)^{n-m-1} C_n^n - \\ - C_{m+2}^n + C_{m+3}^n - C_{m+4}^n + \ldots + (-1)^{n-m-1} C_n^n + \\ + C_{m+3}^n - C_{m+4}^n + \ldots + (-1)^{n-m-1} C_n^n - \\ - C_{m+4}^n + \ldots + (-1)^{n-m-1} C_n^n + \\ \ldots\ldots\ldots \pm \\ + (-1)^{n-m-1} C_n^n . \end{aligned}$$

или, соединяя въ одинъ сходственные члены:

$$C^{n-2}_{m-1} = C^{n}_{m+1} - 2C^{n}_{m+2} + 3C^{n}_{m+3} - 4C^{n}_{m+4} + \dots + (-1)^{n-m-1} C^{n-m}_{1} C^{n}_{n} \quad (6)$$

(ибо $C^{n-m}_{1} = n - m =$ числу строчекъ) — что представляетъ формулу (6). Мѣняя въ этой формулѣ n на $n-1$, получимъ:

$$C^{n-3}_{m-1} = C^{n-1}_{m+1} - 2C^{n-1}_{m+2} + 3C^{n-1}_{m+3} - 4C^{n-1}_{m+4} + \dots + (-1)^{n-m-2} C^{n-m-1}_{1} C^{n-1}_{n-1};$$

раскрывая каждый членъ по формулѣ (5'):

$$\begin{aligned} C^{n-3}_{m-1} = C^{n}_{m+2} - C^{n}_{m+3} + C^{n}_{m+4} - C^{n}_{m+5} + \dots + (-1)^{n-m-2}\, C^{n}_{n} - \\ - 2C^{n}_{m+3} + 2C^{n}_{m+4} - 2C^{n}_{m+5} + \dots + (-1)^{n-m-2} 2C^{n}_{n} + \\ + 3C^{n}_{m+4} - 3C^{n}_{m+5} + \dots + (-1)^{n-m-2} 3C^{n}_{n} - \\ - 4C^{n}_{m+5} + \dots + (-1)^{n-m-2} 4C^{n}_{n} + \\ + \dots \dots \dots + \\ + (-1)^{n-m-2} C^{n-m-1}_{1} C^{n}_{n}, \end{aligned}$$

и соединяя сходственные члены въ одинъ:

$$C^{n-3}_{m-1} = C^{n}_{m+2} - 3C^{n}_{m+3} + 6C^{n}_{m+4} - 10C^{n}_{m+5} + \dots + (-1)^{n-m-2} C^{n-m}_{2} C^{n}_{n}, {}^{*}) \quad (7')$$

что представляетъ формулу (7). Продолжая поступать такимъ образомъ, мы дойдемъ до формулы (8);

$$C^{n-k-1}_{m-1} = C^{n}_{m+k} - C^{k+1}_{1} C^{n}_{m+k+1} + C^{k+2}_{2} C^{n}_{m+k+2} - \dots + (-1)^{n-m-k} C^{n-m}_{n-m-k} C^{n}_{n}; \quad (8')$$

остается показать, что это равенство будетъ сохранять свой видъ для слѣдующаго значенія k. Съ этою цѣлію перемѣнимъ здѣсь n на $n-1$; будемъ имѣть:

$$C^{n-k-2}_{m-1} = C^{n-1}_{m+k+1} - C^{k+1}_{1} C^{n-1}_{m+k+2} + C^{n-1}_{[illegible]} - \dots + (-1)^{n-m-k-1} C^{n-m-1}_{n-m-k-1} C^{n-1}_{n-1}$$

---

*) ибо, (такъ какъ $C^{n-m-1}_{1} = n - m - 1$)

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - m - 1) = \frac{(n-m)(n-m-1)}{1 . 2} = C^{n-m}_{2}$$

раскрывая каждое C^{n-1}_{m+k-l} по формулѣ (5), получимъ:

$$C^{n-k-2}_{m-1} = C^n_{m+k+1} - C^n_{m+k+2} + C^n_{m+k+3} + \dots + (-1)^{n-m-k-1} C^n_n -$$

$$-C_1^{k+1} C^n_{m+k+2} + C_1^{k+1} C^n_{m+k+3} - \dots + (-1)^{n-m-k-1} C_1^{k+1} C^n_n +$$

$$+C_2^{k+2} C^n_{m+k+3} - \dots + (-1)^{n-m-k-1} C_2^{k+2} C^n_n$$

$$- \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; +$$

$$+(-1)^{n-m-k-1} C^{n-m-1}_{n-m-k-1} C^n_n;$$

соединяя сходственные члены въ единъ, имѣя въ виду что

$$(10) \begin{cases} 1 + C_1^{k+1} = 1 + k + 1 = k + 2 = C_1^{k+2}; \\ 1 + C_1^{k+1} + C_2^{k+2} = C_1^{k+2} + C_2^{k+2} = C_2^{k+3}; \\ 1 + C_1^{k+1} + C_2^{k+2} + C_3^{k+3} = C_2^{k+3} + C_3^{k+3} = C_3^{k+4}; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ 1 + C_1^{k+1} + C_2^{k+2} + C_3^{k+3} + \dots + C_l^{k+l} = C_{l-1}^{k+l} + C_l^{k+l} = C_l^{k+l+1}; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

мы получимъ:

$$(11) \quad C^{n-k-2}_{m-1} = C^n_{m+k+1} - C_1^{k+2} C^n_{m+k+2} + C_2^{k+3} C^n_{m+k+3} - \dots + (-1)^{n-m-k-1} C^{n-m}_{n-m-k-1} C^n_n,$$

что получается изъ (8') чрезъ увеличеніе k на единицу.

Итакъ формулы (5), (6), (7), (8) доказаны, а слѣд. доказано и (4), т. е., что

$$(12) \quad R_m = \sum_{j=0}^{j=n-m} C^{n-j-1}_{m-1} \Delta^m u_{x+jh};$$

эту же форму остатка мы уже имѣли въ (1) § 36, и привели къ виду $C^n_m \mathfrak{M}$, гдѣ $\mathfrak{M}$ опредѣляется формулою (8) того же §, и есть величина средняя между наибольшею и наименьшею изъ величинъ (9) § 36.

38. Перемѣнимъ въ формулѣ (12) § 36 h на Δx; мы будемъ имѣть:

$$(1) \quad u_{x+n\Delta x} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \dots + C^n_{m-1} \Delta^{m-1} u_x + C^n_m \mathfrak{M},$$

гдѣ по (8) того же § будетъ теперь

$$\mathfrak{M}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}\Delta^m u_{x+k\Delta x}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}} \qquad (2)$$

Положимъ теперь

$$n\Delta x=h;$$

отсюда получимъ

$$n=\frac{h}{\Delta x},$$

и это значеніе n внесемъ въ формулы (1) и (2).

Мы выполнимъ это на самомъ дѣлѣ только для общаго члена этой формулы, именно:

$$C_k^n\Delta^k u_x=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\Delta^k u_x, \qquad (5)$$

ибо изъ него, давая k всѣ значенія отъ 1 до $m-1$, получимъ всѣ члены до остаточнаго. Сдѣлавъ сказанное, получимъ:

$$C_k^n\Delta^k u_x=\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-\overline{k-1}\Delta x)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}.$$

Будемъ теперь подводить здѣсь Δx къ нулю; тогда, какъ легко видѣть, будетъ

$$\text{пред. } C_k^n\Delta^k u_x=\frac{h^k}{1.2.3\ldots k}\text{ пред. }\frac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}; \qquad (6)$$

но

$$\text{пред. }\frac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}=\frac{d^k u_x}{dx^k}, \qquad (7)$$

т. е. производной k-го порядка отъ u_x. Дѣйствительно, по опредѣленію производной имѣемъ:

(8) $$\text{пред.}\,\frac{\Delta u_x}{\Delta x}=\frac{du_x}{dx};$$

и слѣдовательно

(9) $$\frac{\Delta u_x}{\Delta x}=\frac{du_x}{dx}+\varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 величина обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ Δx. Допустимъ теперь, что вообще

(10) $$\text{пред.}\,\frac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}=\frac{d^k u_x}{dx^k};$$

для $k=1$ это тождественно съ (8); намъ остается теперь показать, что это равенство, разъ оно справедливо для порядка k разностей и производныхъ,—будетъ справедливо и для слѣдующаго порядка ихъ. Изъ (10) слѣдуетъ, что

(11) $$\frac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}=\frac{d^k u_x}{dx^k}+\varepsilon_k,$$

гдѣ ε_k обращается въ нуль вмѣстѣ съ Δx. Беря отъ обѣихъ частей разность и дѣля ихъ на Δx, будемъ имѣть:

$$\frac{\Delta\dfrac{\Delta^k u_x}{\Delta x^k}}{\Delta x}=\frac{\Delta\dfrac{d^k u_x}{dx^k}}{\Delta x}+\frac{\Delta\varepsilon_k}{\Delta x};$$

или

(12) $$\frac{\Delta^{k+1}u_x}{\Delta x^{k+1}}=\frac{d^k\dfrac{\Delta u_x}{\Delta x}}{dx^k}+\frac{\Delta\varepsilon_k}{\Delta x},$$

ибо

$$\frac{\Delta \dfrac{d^k u_x}{dx^k}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{d^k u_{x+h}}{dx^k} - \dfrac{d^k u_x}{dx^k}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{d^k(u_{x+h}-u_x)}{dx^k}}{\Delta x} = \frac{d^k \dfrac{\Delta u_x}{\Delta x}}{dx^k};$$

дифференцируя же (9) k разъ, получимъ:

$$\frac{d^k \dfrac{\Delta u_x}{\Delta x}}{dx^k} = \frac{d^{k+1} u_x}{dx^{k+1}} + \frac{d^k \varepsilon_1}{dx^k}; \qquad (13)$$

внеся это въ (12) будемъ имѣть:

$$\frac{\Delta^{k+1} u_x}{\Delta x^{k+1}} = \frac{d^{k+1} u_x}{dx^{k+1}} + \frac{d^k \varepsilon_1}{dx^k} + \frac{\Delta \varepsilon_k}{\Delta x},$$

или, такъ какъ

$$\frac{\Delta \varepsilon_k}{\Delta x} = \frac{d\varepsilon_k}{dx} + \eta,$$

гдѣ η обращается въ нуль вмѣстѣ съ Δx:

$$\frac{\Delta^{k+1} u_x}{\Delta x^{k+1}} = \frac{d^{k+1} u_x}{dx^{k+1}} + \frac{d^k \varepsilon_1}{dx^k} + \frac{d\varepsilon_k}{dx} + \eta; \qquad (14)$$

отсюда переходя къ предѣлу, получимъ:

$$\text{пред.}\, \frac{\Delta^{k+1} u_x}{\Delta x^{k+1}} = \frac{d^{k+1} u_x}{dx^{k+1}}, \qquad (15)$$

ибо

$$\text{пред.}\, \frac{d^k \varepsilon_1}{dx^k}\bigg|_{\Delta x=0} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_k}{dx}\bigg|_{\Delta x=0} = 0, \qquad (16)$$

на основаніи того извѣстнаго предложенія, что „если $\varphi(x, \alpha)$ — непрерывная функція x, обращается при всякомъ значеніи x въ нуль, когда положимъ $\alpha = 0$, то и ея производная $\frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx}$ обратится въ нуль, когда положимъ $\alpha = 0$", а слѣдовательно тоже и производныя высшихъ порядковъ *). И такъ формула (10) доказана, и потому изъ (6) получимъ:

$$\text{(17)} \qquad \text{пред.}\, C_k^n \Delta^k u_x = \frac{h^k}{k!} \frac{d^k u_x}{dx^k},$$

гдѣ $k! = 1.2.3 \ldots k$, и потому формула (1) обратится въ такую:

$$\text{(18)} \quad u_{x+h} = u_x + h\frac{du_x}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3u_x}{dx^3} + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}u_x}{dx^{m-1}} + R_m,$$

гдѣ уже

$$\text{(19)} \qquad R_m = \text{пред.}\, C_m^n \mathfrak{M}.$$

Это и есть строка Тэйлора съ остаточнымъ членомъ, котораго форму намъ остается еще найти. Внося въ C_m^n вмѣсто h его значеніе, мы будемъ имѣть:

$$\text{(20)} \quad \begin{cases} R_m = \text{пред.}\left[\dfrac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots(h-\overline{m-1}\Delta x)}{1.2.3\ldots m} \cdot \dfrac{\mathfrak{M}}{\Delta x^m}\right] = \\ = \dfrac{h^m}{1.2.3\ldots m}\, \text{пред.}\, \dfrac{\mathfrak{M}}{\Delta x^m}; \end{cases}$$

---

*) Это предложеніе такъ доказывается. По опредѣленію производной имѣемъ:

$$\frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} = \text{пред.}\, \frac{\varphi(x+h, \alpha) - \varphi(x, \alpha)}{h}\Big|_{h=0};$$

полагая $\alpha = 0$, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi(x+h, 0) - \varphi(x, 0)}{h} = 0,$$

какъ бы мало h ни было; но если какая либо величина $= 0$, то и ея предѣлъ $= 0$; т. е

$$\text{пред.}\, \frac{\varphi(x+h, 0) - \varphi(x, 0)}{h}\Big|_{h=0} = \frac{d\varphi(x, 0)}{dx} = 0,$$

что и требовалось доказать.

но

$$\frac{\mathfrak{M}}{\Delta x^m} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k} \frac{\Delta^m u_{x+k\Delta x}}{\Delta x^m}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-m} C_{m-1}^{n-1-k}}; \tag{21}$$

это представляетъ величину среднюю между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ отношенія $\frac{\Delta^m u_{x+k\Delta x}}{\Delta x^m}$ въ предѣлахъ измѣненія x между x и $x+n\Delta x-m\Delta x=x+h-m\Delta x$, или почти $x+h$, ибо $m\Delta x$ безконечно-мало при безконечно-маломъ Δx; но въ этомъ случаѣ и $\frac{\Delta^m u_{x+k\Delta x}}{\Delta x^m}$ безконечно-мало отличается отъ $\frac{d^m u_x}{dx^m}$ для нѣкотораго промежуточнаго значенія x между предѣлами x и $x+h$. Слѣдовательно пред. $\frac{\mathfrak{M}}{\Delta x^m}=$ нѣкоторой величинѣ, заключающейся между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ производной $\frac{d^m u_x}{dx^m}$ въ промежуткѣ значеній x отъ x до $x+h$.

Если $\frac{d^m u_x}{dx^m}$ есть функція x непрерывная въ этихъ предѣлахъ, то она непремѣнно по крайней мѣрѣ хотя одинъ разъ получитъ это значеніе въ упомянутыхъ предѣлахъ измѣненія x, т. е. будетъ имѣть это среднее между наибольшимъ и наименьшимъ значеніе для нѣкотораго значенія x, средняго между x и $x+h$, которое можно такъ представить: $x+\theta h$, гдѣ $0<\theta<1$; т. е. въ этомъ случаѣ будетъ

$$\text{пред.} \frac{\mathfrak{M}}{\Delta x^m} = \frac{d^m u_{x+\theta h}}{dx^m},$$

и остаточный членъ формулы (15) приметъ такой видъ:

$$R_m = \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m u_{x+\theta h}}{dx^m}; \tag{22}$$

это есть остаточный членъ Тэйлорова ряда въ формѣ, данной Лагранжемъ. Итакъ мы получили изъ формулы (1), подводя Δx къ нулю рядъ Тейлора съ остаточнымъ членомъ Лагранжа:

Частных случаях:
$m=1$; $u_{x+h}=u_x+h\frac{d(u_{x+\theta h})}{dx}$ или $f(x)=f(a)+(x-a)f'(\xi)$ ф. Лагранжа.
$m=2$; $m=3$; и т. д. } прибл. выраж. $f(x)=\dots$

$$23)\quad u_{x+h}=u_x+h\frac{du_x}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u_x}{dx^2}+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3u_x}{dx^3}+\dots+\frac{h^{m-1}}{m-1!}\frac{d^{m-1}u_x}{dx^{m-1}}+\frac{h^m}{m!}\frac{d^mu_{x+\theta h}}{dx^m}$$

Если остаточный членъ $\frac{h^m}{m!}\frac{d^mu_{x+\theta h}}{dx^m}$ съ увеличеніемъ m стремится къ нулю, то рядъ Тэйлора можетъ быть продолженъ до безконечности такимъ образомъ:

$$(24)\quad u_{x+h}=u_x+h\frac{du_x}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u_x}{dx^2}+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3u_x}{dx^3}+\dots+\frac{h^m}{m!}\frac{d^mu_x}{dx^m}+\dots$$

Въ этомъ случаѣ, отдѣляя функціональный символъ u_x отъ операціоннаго $\frac{d}{dx}$ и вынося его за скобки, мы легко получимъ такую символическую формулу:

$$(25)\quad u_{x+h}=e^{h\frac{d}{dx}}u_x$$

ибо разлагая $e^{h\frac{d}{dx}}$ въ рядъ и умножая на u_x, мы получимъ формулу (24). Сличая это съ (5) § 32, получаемъ соотношеніе между символами E и $\frac{d}{dx}$:

$$(26)\quad E=e^{h\frac{d}{dx}}.$$

39. 39. Перемѣнивъ въ формулѣ (23) пред. § m на $m+1$ и перенося затѣмъ первый членъ второй части налѣво, мы получимъ, принимая во вниманіе, что $u_{x+h}-u_x=\Delta u_x$, такое выраженіе разности перваго порядка чрезъ производныя:

$$(1)\quad \Delta u_x=h\frac{du_x}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u_x}{dx^2}+\dots+\frac{h^m}{m!}\frac{d^mu_x}{dx^m}+R_{m+1},$$

гдѣ по (22) того же §:

$$(2)\quad R_{m+1}=\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}u_{x+\theta h}}{dx^{m+1}},$$

при $0 < \theta < 1$. Для дальнѣйшаго будетъ однако удобнѣе та форма остаточнаго члена Тэйлорова ряда, которая выводится въ интегральномъ исчисленіи *), именно

$$R_{m+1} = \int_0^h \frac{t^m}{m!} f^{(m+1)}(x+h-t)dt, \tag{3}$$

когда введемъ въ нее новую перемѣнную, положивъ $t = hz$; тогда получится такое выраженіе остаточнаго члена:

$$R_{m+1} = h^{m+1} \int_0^1 \frac{z^m}{m!} f^{(m+1)}(x+h-hz)dz. \tag{4}$$

Примѣняя эту формулу къ нашему ряду (1) и перемѣняя Лейбницевское обозначеніе производныхъ на болѣе короткое Лагранжевское, мы будемъ имѣть такое выраженіе первой разности чрезъ производныя съ остаточнымъ членомъ:

$$\Delta u_x = hu'_x + \frac{h^2}{1.2} u''_x + \ldots + \frac{h^m}{m!} u_x^{(m)} + h^{m+1} \int_0^1 \frac{z^m}{m!} u_{x+h-hz}^{(m+1)} dz. \tag{5}$$

40 40. Для полученія выраженія второй разности чрезъ производныя возьмемъ разность отъ обѣихъ частей этого равенства; при этомъ въ послѣднемъ членѣ можно перемѣнить порядокъ дѣйствій интегрированія и взятія разности **); мы получимъ тогда слѣдующее выраженіе:

$$\Delta^2 u_x = h\Delta u'_x + \frac{h^2}{1.2} \Delta u''_x + \ldots + \frac{h^m}{m!} \Delta u_x^{(m)} + h^{m+1} \int_0^1 \frac{z^m}{m!} \Delta u_{x+h-hz}^{(m+1)} dz. \quad (1)$$

---

*) См. напр. *Sturm*. Cours d'Analyse. 6-me ed. Paris 1880. T. I-er. p. 373. или *Рощинъ*. Записки по дифференціальному и интегральному исчисленію. Часть вторая § 380 стр. 108. Спб. 1888.

**) ибо вообще

$$\Delta \int_0^1 f(x+h-hz)\,\varphi(z)dz =$$

$$= \int_0^1 f(x+2h-hz)\,\varphi(z)dz - \int_0^1 f(x+h-hz)\,\varphi(z)dz =$$

$$= \int_0^1 \Big[f(x+2h-hz) - f(x+h-hz)\Big]\varphi(z)dz = \int_0^1 \Delta f(x+h-hz)\,\varphi(z)dz.$$

Но по формулѣ (5) предыдущаго §, перемѣняя послѣдовательно u_x на u'_x, u''_x, ... $u^{(m)}_x$ и останавливая рядъ всякій разъ на производной m-го порядка, мы получимъ такой рядъ равенствъ:

$$(2)\quad\begin{cases}\Delta u'_x = h u''_x + \dfrac{h^2}{1.2} u'''_x + \ldots + \dfrac{h^{m-1}}{(m-1)!} u^{(m)}_x + h^m \displaystyle\int_0^1 \dfrac{z^{m-1}}{(m-1)!} u^{(m+1)}_{x+h-hz}\, dz \\ \Delta u''_x = \qquad h u'''_x + \ldots + \dfrac{h^{m-2}}{(m-2)!} u^{(m)}_x + h^{m-1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{z^{m-2}}{(m-2)!} u^{(m+1)}_{x+h-hz}\, dz \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u^{(m-1)}_x = \qquad \dfrac{h}{1} u^{(m)}_x + h^2 \displaystyle\int_0^1 \dfrac{z}{1!} u^{(m+1)}_{x+h-hz}\, dz \\ \Delta u^{(m)}_x = \qquad h \displaystyle\int_0^1 u^{(m+1)}_{x+h-hz}\, dz.\end{cases}$$

[Послѣднее изъ этихъ равенствъ легко повѣряется, ибо внося h подъ знакъ интеграла, получимъ:

$$\int_0^1 u^{(m+1)}_{x+h-hz}\, h\, dz = \left(-u^{(m)}_{x+h-hz}\right)_0^1 = u^{(m)}_{x+h} - u^{(m)}_x = \Delta u^{(m)}_x].$$

Помножая равенства (2) по порядку на h, на $\dfrac{h^2}{1.2}$, ... на $\dfrac{h^{m-1}}{(m-1)!}$, на $\dfrac{h^m}{m!}$, и складывая, получимъ такой результатъ:

$$(3)\quad\begin{cases}\Delta^2 u_x = h^2 u''_x + a_{2,3} h^3 u'''_x + \ldots + a_{2,m} h^m u^{(m)}_x + \\ \quad + h^{m+1} \displaystyle\int_0^1 \left(\psi'_m(z)\, u^{(m+1)}_{x+h-hz} + \dfrac{z^m}{m!} \Delta u^{(m+1)}_{x+h-hz}\right) dz,\end{cases}$$

гдѣ для краткости положено:

$$\left.\begin{aligned}
a_{2,3} &= 2\cdot\frac{1}{1.2}; \qquad a_{2,4}=2\,\frac{1}{1.2.3}+\left(\frac{1}{1.2}\right)^2;\\
a_{2,5} &= 2\,\frac{1}{4!}+2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!};\\
a_{2,6} &= 2\,\frac{1}{5!}+2\,\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2,2l-1} &= 2\,\frac{1}{(2l-2)!}+2\,\frac{1}{(2l-3)!}\cdot\frac{1}{2!}+2\,\frac{1}{(2l-4)!}\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+2\,\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{(l-1)!};\\
a_{2,2l} &= 2\,\frac{1}{(2l-1)!}+2\,\frac{1}{(2l-2)!}\cdot\frac{1}{2!}+2\,\frac{1}{(2l-3)!}\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+\left(\frac{1}{l!}\right)^2;
\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

и т. д.

и

$$\psi_m(z)=\frac{z^m}{m!}+\frac{z^{m-1}}{(m-1)!\,2!}+\frac{z^{m-2}}{(m-2)!\,3!}+\ldots+\frac{z^2}{2!(m-1)!}+\frac{z}{m!}. \quad (5)$$

Функція $\psi'_m(z)$, равно какъ и $\frac{z^m}{m!}$ между предѣлами интеграла не мѣняютъ знака, потому

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\psi'_m(z)u^{(m+1)}_{x+h-hz}+\frac{z^m}{m!}\Delta u^{(m+1)}_{x+h-hz}\right)dz=\\
&=u^{(m+1)}_{x+h-h\theta}\int_0^1\psi'_m(z)dz+\Delta u^{(m+1)}_{x+h-h\theta_1}\int_0^1\frac{z^m}{m!}dz,
\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

(гдѣ $0<\theta<1$ и $0<\theta_1<1$); но

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{z^m}{m!}dz=\frac{1}{(m+1)!};\\
&\int_0^1\psi'_m(z)dz=\psi_m(1)-\psi_m(0)=\psi_m(1)=a_{2,m+1};
\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

какъ нетрудно видѣть; потому остаточный членъ формулы (3) окончательно приметъ такой видъ:

*

(8) $$h^{m+1}\left(a_{2,m+1}u^{(m+1)}_{x+h-h\theta}+\frac{1}{(m+1)!}\Delta u^{(m+1)}_{x+h-h\theta_1}\right).$$

Что же касается коэффиціентовъ $a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5}\dots a_{2,m}\dots$, то, какъ видно изъ (4), это суть коэффиціенты соотвѣтственно при $z^3, z^4, z^5, \dots z^m, \dots$ въ разложеніи по степенямъ z такой функціи:

(9) $$(e^z-1)^2.$$

41. Возьмемъ теперь разность отъ обѣихъ частей равенства (3) пред. §; тогда получимъ:

(1) $$\begin{cases}\Delta^3 u_x = h^2\Delta u_x'' + a_{2,3}h^3\Delta u_x''' + \dots + a_{2,m}h^m\Delta u_x^{(m)} + \\ \quad + h^{m+1}\int_0^1\left(\psi_m'(z)\Delta u^{(m+1)}_{x+h-hz} + \frac{z^m}{m!}\Delta^2 u^{(m+1)}_{x+h-hz}\right)dz;\end{cases}$$

помножая теперь равенства (2) пред. §, начиная со второго по порядку на

(2) $$h^2,\ a_{2,3}h^4, \dots a_{2,m-1}h^{m-1},\ a_{2,m}h^m,$$

и складывая съ (1) настоящаго §, мы получимъ такой результатъ:

(3) $$\begin{cases}\Delta^3 u_x = h^3 u_x''' + a_{3,4}h^4 u_x^{(IV)} + \dots + a_{3,m}h^m u_x^{(m)} + \\ \quad + h^{m+1}\int_0^1\left(\psi'_{1,m-1}(z)u^{(m+1)}_{x+h-hz} + \psi_m'(z)\Delta u^{(m+1)}_{x+h-hz} + \frac{z^m}{m!}\Delta^2 u^{(m+1)}_{x+h-hz}\right)dz,\end{cases}$$

гдѣ положено:

(4) $$\begin{cases}a_{3,4} = \frac{1}{2!} + a_{2,3};\quad a_{3,5} = \frac{1}{3!} + \frac{a_{2,3}}{2!} + a_{2,4};\ \dots \\ a_{3,m} = \frac{1}{(m-2)!} + \frac{a_{2,3}}{(m-3)!} + \frac{a_{2,4}}{(m-4)!} + \dots + a_{2,m-1};\end{cases}$$

и

(5) $$\psi_{1,m-1}(z) = \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} + a_{2,3}\frac{z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + a_{2,m-1}\frac{z^2}{2!} + a_{2,m}z.$$

Эта функція тоже не мѣняетъ своего знака между предѣлами интеграла; а потому остаточному члену формулы (3) этого § можно дать такой видъ:

$$h^{m+1}\left(a_{3,m+1}u^{(m+1)}_{x+h-\theta h}+a_{2,m+1}\Delta u^{(m+1)}_{x+h-\theta_1 h}+\frac{1}{(m+1)!}\Delta^2 u^{(m+1)}_{x+h-\theta_2 h}\right), \qquad (6)$$

(ибо $\psi_{1,m-1}(1)=a_{3,m+1}$, какъ то видно изъ (5) и (4).

Коэффиціенты $a_{3,4}, a_{3,5}, \ldots a_{3,m} \ldots$ суть коэффиціенты при степеняхъ $z^4, z^5, \ldots z^m \ldots$ въ разложеніи функціи

$$(e^z-1)^2 . (e^z+1) = (e^z-1)^3 . \qquad (7)$$

42. 42. Эти результаты легко обобщить и написать, предполагая $k<m$, такую формулу:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^k u_x = h^k u_x^{(k)} + a_{k,k+1}h^{k+1}u_x^{(k+1)}+\ldots+a_{k,m}h^m u_x^{(m)}+\\ +h^{m+1}\int_0^1\Big(\psi'_{k-2,m-k+2}(z)u^{(m+1)}_{x+h-hz}+\psi'_{k-3,m-k+1}(z)\Delta u^{(m+1)}_{x+h-hz}+\\ +\ldots+\psi'_m(z)\Delta^{k-2}u^{(m+1)}_{x+h-hz}+\frac{z^m}{m!}\Delta^{k-1}u^{(m+1)}_{x+h-hz}\Big)dz,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned} a_{k,k+1} &= \frac{1}{2!}+a_{k-1,k};\\ a_{k,k+2} &= \frac{1}{3!}+\frac{a_{k-1,k}}{2!}+a_{k-1,k+1};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k,m} &= \frac{1}{(m-k+1)!}+\frac{a_{k-1,k}}{(m-k)!}+\frac{a_{k-1,k+1}}{(m-k-1)!}+\ldots+a_{k-1,m-1},\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\psi_{k-2,m-k+2}(z) = \frac{z^{m-k+2}}{(m-k+2)!}+a_{k-1,k}\frac{z^{m-k+1}}{(m-k+1)!}+\\ +a_{k-1,k+1}\frac{z^{m-k}}{(m-k)!}+\ldots+a_{k-1,m-1}\frac{z^2}{2!}+a_{k-1,m}.z.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эта функція тоже не мѣняетъ знака между предѣлами интеграла, а потому (имѣя въ виду, что $\psi_{k-2,m-k+2}(1)=a_{k,m+1}$), остаточному члену формулы (1) можно дать окончательно такую форму:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & h^{m+1}\Big(a_{k,m+1}u^{(m+1)}_{x+h-\theta h}+a_{k-1,m+1}\Delta u^{(m+1)}_{x+h-\theta_1 h}+\dots+ \\ & +a_{2,m+1}\Delta^{(k-2)}u^{(m+1)}_{x+h-\theta_{k-2}h}+\frac{1}{(m+1)!}\Delta^{(k-1)}u^{(m+1)}_{x+h-\theta_{k-1}h}\Big). \end{aligned} \right.$$

Коэффиціенты $a_{k,k+1}, a_{k,k+2}, \dots a_{k,m} \dots$ суть коэффиціенты соотвѣтственно при $z^{k+1}, z^{k+2}, \dots z^m, \dots$ въ разложеніи функціи

$$(5)\qquad (e^z-1)^{k-1}(e^z-1)=(e^z-1)^k.$$

Вѣрность формулъ (1) и (4) докажется легко по способу заключенія отъ k къ $k+1$, что мы предоставляемъ читателю выполнить самому.

43. Такъ какъ коэффиціенты формулы (1) пред. § суть коэффиціенты при степеняхъ z въ разложеніи функціи $(e^z-1)^k$, то отдѣляя операціонные символы отъ функціональныхъ и означая чрезъ $[\phi(z)]_m$ часть разложенія функціи $\phi(z)$ въ рядъ по степенямъ z, оканчивающуюся членомъ со степенью m отъ h, мы можемъ упомянутую формулу короче такъ представить:

$$(1)\qquad \Delta^k u_x=\left[(e^{h\frac{d}{dx}}-1)^k\right]_m u_x+R_{k,m+1},$$

гдѣ по формулѣ (4) пред. §

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & R_{k,m+1}=h^{m+1}\Big(a_{k,m+1}u^{(m+1)}_{x+h-\theta h}+a_{k-1,m+1}\Delta u^{(m+1)}_{x+h-\theta_1 h}+\dots \\ & \dots+a_{2,m+1}\Delta^{(k-2)}u^{(m+1)}_{x+h-\theta_{k-2}h}+\frac{1}{(m+1)!}\Delta^{(k-1)}u^{(m+1)}_{x+h-\theta_{k-1}h}\Big). \end{aligned} \right.$$

По раскрытіи перваго члена второй части формулы (1), какъ будто $\frac{d}{dx}$ было бы количество, останется только принять произведеніе $\frac{d^l}{dx^l}u_x$ за $\frac{d^l u_x}{dx^l}=u_x^{(l)}$, чтобы получить точную формулу (1) § 42.

44. Но нетрудно получить и формулы для непосредственнаго вычисленія каждаго коэффиціента формулы (1) § 42. Эти коэффиціенты не зависятъ отъ частнаго вида функціи u_x, а потому мы можемъ принять:

$$u_x = x^p, \tag{1}$$

гдѣ p означаетъ цѣлое положительное число не большее m. Тогда остаточный членъ, а также всѣ тѣ, которые будутъ содержать производныя порядка выше p, тождественно обратятся въ нуль для всякаго значенія x; члены же, содержащіе производныя нисшаго порядка чѣмъ p, какъ содержащіе множителемъ различныя степени x, обратятся въ нуль, когда положимъ $x = 0$, и мы тогда получимъ изъ (1) § 42 такое равенство:

$$\Delta^k 0^p = p!\, a_{k,p}, \tag{2}$$

откуда найдемъ:

$$a_{k,p} = \frac{\Delta^k 0^p}{p!}. \tag{3}$$

Вносъ это въ упомянутую сейчасъ формулу (1) § 42, мы получимъ слѣдующее выраженіе разности k-го порядка любой функціи u_x:

$$\Delta^k u_x = h^k u_x^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{p=m} \frac{\Delta^k 0^p}{p!} h^p u_x^{(p)} + R_{k,m+1}, \tag{4}$$

гдѣ $R_{k,m+1}$ опредѣляется формулою (2) пред. §.

45. Переходимъ теперь къ обратной задачѣ: къ выраженію производной k-го порядка черезъ разности.

Вводя въ формулу (1) § 42 обозначеніе остаточнаго члена чрезъ $R_{k,m+1}$, (причемъ подъ этимъ знакомъ можемъ разумѣть и окончательное выраженіе остаточнаго члена, даваемое формулою (2) § 43), мы получимъ изъ нея, мѣняя послѣдовательно k на $k+1$, $k+2$, ... m, такой рядъ равенствъ:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}
\Delta^k u_x = h^k u_x^{(k)} + a_{k,k+1} h^{k+1} u_x^{(k+1)} + a_{k,k+2} h^{k+2} u_x^{(k+2)} + \ldots + a_{k,m} h^m u_x^{(m)} + R_{k,m+1} \\
\Delta^{k+1} u_x = h^{k+1} u_x^{(k+1)} + a_{k+1,k+2} h^{k+2} u_x^{(k+2)} + \ldots + a_{k+1,m} h^m u_x^{(m)} + R_{k+1,m+1} \\
\Delta^{k+2} u_x = h^{k+2} u_x^{(k+2)} + \ldots + a_{k+2,m} h^m u_x^{(m)} + R_{k+2,m+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^m u_x = h^m u_x^{(m)} + R_{m,m+1}
\end{array}\right.$$

Помножая эти равенства по порядку на неопредѣленные сперва множители $1, b_{k,k+1}, b_{k,k+2}, \ldots b_{k,m}$, по сложеніи получимъ:

$$(2)\quad h^k u_x^{(k)} = \Delta^k u_x + b_{k,k+1}\Delta^{k+1} u_x + b_{k,k+2}\Delta^{k+2} u_x + \ldots + b_{k,m}\Delta^m u_x + \mathfrak{R}_{k,m+1},$$

когда опредѣлимъ эти множители такъ, чтобы производныя $u_x^{(k+1)}$, $u_x^{(k+2)}, \ldots u_x^{(m)}$ исчезли изъ второй части, слѣд. положивъ:

$$(3)\left\{\begin{array}{l}
a_{k,k+1} + b_{k,k+1} = 0 \\
a_{k,k+2} + a_{k+1,k+2} b_{k,k+1} + b_{k,k+2} = 0 \\
a_{k,k+3} + a_{k+1,k+3} b_{k,k+1} + a_{k+2,k+3} b_{k,k+2} + b_{k,k+3} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k,m} + a_{k+1,m} b_{k,k+1} + a_{k+2,m} b_{k,k+2} + a_{k+3,m} b_{k,k+3} + \ldots + a_{m-1,m} b_{k,m-1} + b_{k,m} = 0
\end{array}\right.$$

и сдѣлаемъ:

$$(4)\quad -\mathfrak{R}_{k,m+1} = R_{k,m+1} + b_{k,k+1} R_{k+1,m+1} + b_{k,k+2} R_{k+2,m+1} + \ldots + b_{k,m} R_{m,m+1}.$$

46. Изъ уравненій (3) коэффиціенты $b_{k,l}$ легко опредѣляются по коэффиціентамъ $a_{i,j}$; но нетрудно получить формулы для непосредственнаго опредѣленія этихъ коэффиціентовъ. Такъ какъ они независятъ отъ частнаго вида функціи u_x, то мы можемъ положить

$$(1)\qquad u_x = x^{(p|h)},$$

гдѣ p не больше m:

$$(2)\qquad p \leqq m.$$

Такъ какъ факторіэль (1) цѣлая функція x степени p, то его производныя порядка высшаго p тождественно равны нулю; на этомъ основаніи и остатокъ ряда (2) пред. § $\mathfrak{R}_{k,m+1}$, какъ содержащій производныя порядка $m+1$, будетъ тождественно равенъ нулю; равнымъ образомъ будутъ нулями и всѣ разности порядка высшаго p; члены же формулы (2) пред. §, содержащіе разности порядковъ ниже p, обратятся въ нуль, когда положимъ $x=0$, ибо всѣ будутъ содержать x множителемъ; слѣд. въ этомъ случаѣ уравненіе (2) пред. § обратится въ такое (вводя опять Лейбницевское обозначеніе производной):

$$h^k \frac{d^k 0^{(p|h)}}{d0^k} = b_{k,p} \cdot p!\, h^p \text{ *)}, \tag{3}$$

откуда найдемъ:

$$b_{k,p} = \frac{1}{p!\, h^{p-k}} \cdot \frac{d^k 0^{(p|h)}}{d0^k}. \tag{4}$$

Внося это въ формулу (2) пред. §, мы получимъ:

$$\frac{d^k u_x}{dx^k} = \frac{1}{h^k} \Delta^k u_x + \sum_{p=k+1}^{p=m} \frac{1}{p!\, h^p} \cdot \frac{d^k 0^{(p|h)}}{d0^k} \Delta^p u_x + \frac{1}{h^k} \mathfrak{R}_{k,m+1}. \tag{5}$$

47. Можно получить и символическую формулу для выраженія производной k-го порядка черезъ разности; для этого стоитъ въ формулѣ (2) § 45 положить

$$u_x = a^x; \tag{1}$$

тогда, имѣя въ виду, что

$$\frac{d^m u_x}{dx^m} = a^x (\log a)^m, \quad \text{и} \quad \Delta^p u_x = a^x (a^h - 1)^p, \tag{2}$$

мы получимъ по раздѣленіи всего на a^x:

$$h^k (\log a)^k = (a^h-1)^k + b_{k,k+1}(a^h-1)^{k+1} + \ldots + b_{k,m}(a^h-1)^m + a^{-x} \mathfrak{R}_{k,m+1}; \tag{3}$$

*) гдѣ $\frac{d^k 0^{(p|h)}}{d0^k}$ введено вмѣсто $\left.\frac{d^k x^{(p|h)}}{dx^k}\right|_{x=0}$.

полагая здѣсь

(4) $$a^h - 1 = \alpha,$$

слѣд.

(5) $$h \log a = \log(1+\alpha)$$

мы будемъ имѣть:

(6) $$[\log(1+\alpha)]^k = \alpha^k + b_{k,k+1}\alpha^{k+1} + \ldots + b_{k,m}\alpha^m + (1+\alpha)^{-x}\mathfrak{R}_{k,m+1},$$

откуда видно, что коэффиціенты $b_{k,k+1}\ldots b_{k,m}$ суть не что иное какъ коэффиціенты при степеняхъ $\alpha^{k+1},\ldots \alpha^m$ въ разложеніи функціи

(7) $$[\log(1+\alpha)]^k.$$

Означая сумму $m+1$ первыхъ членовъ этого разложенія согласно принятому въ § 43 обозначенію чрезъ

(8) $$[(\log(1+\alpha))^k]_m,$$

мы можемъ, перемѣняя α на Δ, формулу (2) § 45 символически такъ представить:

(9) $$\frac{d^k u_x}{dx^k} = [(\log(1+\Delta))^k]_m u_x + \frac{1}{h^k}\mathfrak{R}_{k,m+1},$$

гдѣ $\mathfrak{R}_{k,m+1}$, какъ и въ формулѣ (5) пред. §, имѣетъ значеніе, опредѣляемое по формулѣ (4) § 45. Остаточные члены, нами полученные, конечно, еще очень сложны, чтобы можно было принять ихъ форму за окончательную; но мы на ихъ упрощеніяхъ не будемъ останавливаться.

ГЛАВА III.

Интерполированіе. Формулы Ньютона, Лагранжа; интерполированіе по способу наименьшихъ квадратовъ; формула Чебышева.

48. Въ предыдущихъ главахъ мы научились находить разности данныхъ функцій и изслѣдовали соотношенія между послѣдовательными значеніями функціи и ея разностями, а также между разностями функціи и ея производными; теперь переходимъ къ такой задачѣ: *данъ рядъ значеній независимой перемѣнной x и рядъ соотвѣтственныхъ значеній нѣкоторой ея функціи; вычислить по этимъ даннымъ значеніе этой функціи для нѣкотораго другаго значенія x, отличнаго отъ тѣхъ.* Отысканіе такого значенія функціи называется *интерполированіемъ*, когда это послѣднее значеніе x, для котораго ищется значеніе функціи, есть промежуточное между которыми нибудь двумя членами даннаго ряда значеній x, и *экстраполированіемъ*, когда оно лежитъ совсѣмъ внѣ этихъ значеній; мы займемся здѣсь только интерполированіемъ. Но когда мы будемъ умѣть вычислять значеніе функціи для каждаго значенія x, лежащаго между данными предѣлами, то мы будемъ знать функцію внутри этихъ предѣловъ; потому задача интерполированія можетъ быть такъ формулирована: *по данному ряду значеній x и данному ряду соотвѣтственныхъ значеній его функціи u_x, найти саму функцію.*

49. Прежде всего замѣтимъ, что задача интерполированія: по даннымъ значеніямъ независимой перемѣнной x:

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_k \qquad (1)$$

и соотвѣтственнымъ значеніямъ ея неизвѣстной функціи

$$u_1, u_2, u_3 \dots u_n \; (*) \qquad (2)$$

*) Для краткости вмѣсто u_{x_k} пишемъ u_k.

найти саму функцію — есть задача неопредѣленная: это станетъ совершенно ясно, если взглянемъ на нашу задачу геометрически. Геометрически, разсматривая значенія (1) x какъ абсциссы точекъ, а соотвѣтственныя значенія функціи u_x (2) какъ ихъ ординаты, нашу задачу можно такъ выразить: провести кривую чрезъ n данныхъ точекъ:

$$(3) \qquad (x_1, u_1)\ (x_2, u_2)\ (x_3, u_3) \ldots (x_n, u_n);$$

но очевидно, что чрезъ n точекъ можно провести безчисленное множество кривыхъ, самыхъ разнообразныхъ. Задача наша станетъ совершенно опредѣленною, если мы зададимъ себѣ родъ кривой. Если кривая задана уравненіемъ, содержащимъ n неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, то, подставляя вмѣсто x и u_x въ ея уравненіе

$$(4) \qquad F(x, u_x) = 0$$

координаты данныхъ точекъ (3), мы получимъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ коэффиціентовъ; рѣшая эти уравненія по этимъ коэффиціентамъ и внося полученныя значенія ихъ въ (4), будемъ имѣть совершенно опредѣленную кривую требуемаго рода, проходящую чрезъ данныя точки. Чаще всего разсматриваются кривыя *параболическія*, общій видъ уравненія которыхъ есть:

$$(5) \qquad u_x = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^m;$$

тогда интерполированіе получаетъ названіе *параболическаго интерполированія*. Имъ мы только и будемъ заниматься: искомую функцію мы будемъ представлять себѣ въ формѣ полинома извѣстной степени, напередъ заданной, или опредѣляемой изъ самихъ вычисленій согласно условію, чтобы этотъ полиномъ наиближе подходилъ къ неизвѣстной функціи. Аналитически выражаясь, въ параболическомъ интерполированіи ищется не сама функція, но извѣстное, опредѣленное напередъ или нѣтъ, число членовъ ея разложенія въ рядъ по степенямъ независимой перемѣнной.

50. Въ простѣйшемъ случаѣ, когда степень полинома на единицу меньше числа членовъ даннаго ряда значеній независимой перемѣнной, и этотъ рядъ, кромѣ того, представляетъ ариѳметическую прогрессію, задача параболическаго интерполированія рѣшается съ помощію *формулы Ньютона*, которая легко выводится изъ формулы (7) § 31, именно:

$$1) \quad u_{x+nh} = u_x + C_1^n \Delta u_x + C_2^n \Delta^2 u_x + \ldots + C_m^n \Delta^m u_x + \ldots + C_n^n \Delta^n u_x.$$

Полагая въ этой формулѣ:

$$x+nh=X, \tag{2}$$

откуда имѣемъ:

$$n=\frac{X-x}{h} \tag{3}$$

и внося это въ (1), получимъ, такъ какъ

$$C_m^n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{m-1})}{1.2.3\ldots m}$$

обратится въ

$$\frac{(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)\ldots(X-x-\overline{m-1}h)}{1.2.3\ldots m.h^m}$$

— слѣдующую формулу:

$$\left.\begin{aligned} u_X=u_x&+\frac{X-x}{1}\frac{\Delta u_x}{h}+\frac{(X-x)(X-x-h)}{1.2}.\frac{\Delta^2 u_x}{h^2}+\ldots\\ \ldots&+\frac{(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)\ldots(X-x-\overline{m-1}h)}{1.2.3\ldots m.}.\frac{\Delta^m u_x}{h^m}+\ldots\\ \ldots&+\frac{(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)\ldots(X-x-\overline{n-1}h)}{1.2.3\ldots n}.\frac{\Delta^n u_x}{h^n}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Въ послѣднемъ членѣ мы сдѣлали подстановку (3) лишь въ числителѣ. Эта формула, какъ видимъ, представляетъ разложеніе функціи u_x по факторіаламъ $(X-x)^{(m|h)}$, $[m=0, 1, 2, 3\ldots n]$, и если, отрѣшившись отъ (2), станемъ X считать за перемѣнное, представитъ полиномъ степени n относительно X. Для сформированія входящихъ въ эту формулу разностей мы должны знать для значеній x:

$$x,\ x+h,\ x+2h,\ x+3h,\ldots x+nh, \tag{5}$$

числомъ $n+1$, соотвѣтственныя значенія функціи u_x:

$$u_x,\ u_{x+h},\ u_{x+2h},\ u_{x+3h}\ldots u_{x+nh}. \tag{6}$$

легко провѣрить, что, полагая X равнымъ одному изъ членовъ ряда (5), мы получимъ соотвѣтственный членъ ряда (6) для значенія полинома (4), и, стало быть, этотъ полиномъ представляетъ функцію, принимающую данныя значенія для данныхъ значеній x, и потому рѣшаетъ задачу параболическаго интерполированія въ разсматриваемомъ случаѣ равныхъ промежутковъ между значеніями x.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ (4),

$$X = x + mh, \tag{7}$$

мы увидимъ, что всѣ члены, слѣдующіе за m-ымъ, обратятся въ нуль, а коэффиціенты остальныхъ по сокращеніи на h, такъ какъ изъ (7) слѣдуетъ

$$\frac{X-x}{h} = m,$$

превратятся соотвѣтственно въ $C_1^m, C_2^m, \ldots C_m^m$, и мы получимъ:

$$u_{x+mh} = u_x + C_1^m \Delta u_x + C_2^m \Delta^2 u_x + \ldots + C_m^m \Delta^m u_x,$$

какъ то слѣдуетъ и изъ (1), полагая $n = m$; слѣд. нашъ полиномъ дѣйствительно приметъ значеніе u_{x+mh} для $X = x + mh$. Итакъ онъ удовлетворяетъ всѣмъ требуемымъ условіямъ. — Формула (4) и есть *формула Ньютона* для интерполированія.

51. Для нахожденія значенія функціи u_x когда $X = x_0$, гдѣ x_0 значеніе, лежащее между которыми нибудь членами ряда (5) пред. §, стоитъ только въ формулѣ (4) подставить x_0 вмѣсто X и произвести указанныя дѣйствія. Для удобства вычисленій эту формулу представляютъ такъ:

$$(1)\quad \begin{cases} u_X = u_x + \dfrac{X-x}{h}\left\{\Delta u_x + \left(\dfrac{X-x-h}{2h}\right)\left\{\Delta^2 u_x + \left(\dfrac{X-x-2h}{3h}\right)\left\{\Delta^3 u_x + \ldots\right.\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left.\left.\ldots + \left(\dfrac{X-x-\overline{n-1}h}{n}\right)\Delta^n u_x\right\}\right\}\ldots\right\}, \end{cases}$$

и начинаютъ вычисленіе съ внутреннихъ скобокъ, т. е. вычисляютъ сперва: $\left(\dfrac{X-x-\overline{n-1}h}{n}\right)\Delta^n u_x$, придаютъ къ $\Delta^{n-1} u_x$, помножаютъ сумму на $\left(\dfrac{X-x-\overline{n-2}h}{n-1}\right)$, придаютъ произведеніе къ $\Delta^{n-2} u_x$, по-

множаютъ сумму на $\left(\frac{X - x - \overline{n-3}h}{n-2}\right)$, придаютъ къ $\Delta^{n-3} u_x$, и т. д.; наконецъ послѣднюю полученную сумму помножаютъ на $\frac{X-x}{h}$ и придаютъ къ u_x. Пояснимъ это на примѣрѣ, взятомъ изъ „Brünow, Lehrbuch der Sphärischen Astronomie" Berlin 1862. S. 23. Пусть требуется найти геліоцентрическую долготу Меркурія въ средній полдень 5-го Января 1850 г. для Берлинскаго меридіана. Въ Берлинскомъ календарѣ значутся для этого года слѣдующія долготы, при которыхъ мы помѣщаемъ и ихъ разности до пятой включительно,—каждую противъ промежутка между тѣми, изъ которыхъ эта разность получается, согласно установившемуся у астрономовъ обычаю:

	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$	$\Delta^5 u_x$
Янв. 0	303°25′ 1″,5					
		+ 6°41′50″,0				
2	310° 6′51″,5		+ 18′48″,0			
		7° 0′38″,0		+ 2′44″,4		
4	317° 7′29″,5		21′32″,4		+ 10″,1	
		7°22′10″,4		2′54″,5		— 5″,4
6	324°29′39″,9		24′26″,9		4″,7	
		7°46′37″,3		2′59″,2		
8	332°16′17″,2		27′26″,1			
		8°14′ 3″,4				
10	340°30′20″,6					

Здѣсь $h = 2$, $x = 0$, $X - x = 5$; слѣд.

$$\frac{X-x}{h} = \frac{5}{2} = 2,5;\ \frac{X-x-h}{2h} = \frac{3}{4} = 0,75;\ \frac{X-x-2h}{3h} = \frac{1}{6} = 0,166\ldots;$$

$$\frac{X-x-3h}{4h} = -\frac{1}{8} = -0,125;\ \frac{X-x-4h}{5h} = -0,3;$$

Потому будемъ имѣть:

$$\Delta^5 u_x = -5'',4$$

помножаемъ на $\times \dfrac{X-x-4h}{5h} = \times -0,3$

получаемъ $+1'',62$

придаемъ $+\Delta^4 u_x = +10'',10$

получаемъ $+11'',72$

помножаемъ на $\times \dfrac{X-x-3h}{4h} = \times -0,125 = -\dfrac{1}{8}$

получаемъ $-1'',47$

придаемъ: $+\Delta^3 u_x = +2'44'',40$

$$+2'42'',93$$

$$\times \frac{X-x-2h}{3h} = \times 0,1666\ldots = \frac{1}{6}$$

$$+0'27'',16$$

$$+\Delta^2 u_x = +18'48'',00$$

$$+19'15'',16$$

$$\times \frac{X-x-h}{2h} = \times 0,75 = \frac{3}{4}$$

$$+14'26'',37$$

$$+\Delta u_x = 6^0 41'50'',00$$

$$+6^0 56'16'',37$$

$$\times \frac{X-x}{h} = \times 2,5 = 2\frac{1}{2}$$

$$+17^0 20'40'',93$$

$$u_x = +303^0 25' 1'',50$$

искомая долгота $= +320^0 45' 42'',43$.

Если бы пренебрегли пятою разностью, то вмѣсто $42'',43$ получили бы $42'',50$, — больше на $0,07$; такою погрѣшностью въ разсматриваемомъ случаѣ можно пренебречь, а потому въ практическомъ смыслѣ правильнѣе было бы начать вычисленіе съ четвертой разности.

52. Въ формулу Ньютона входятъ разности, относящіяся къ аргументу x, для вычисленія которыхъ необходимо знать $u_x, u_{x+h}, u_{x+2h}, \ldots u_{x+nh}$. Часто предпочитаютъ пользоваться разностями, выведенными изъ значеній функцій, отвѣчающихъ тѣмъ значеніямъ x, относительно которыхъ, то, для котораго значеніе u_x ищется, лежитъ почти посерединѣ. Такъ напр. для $n = 7$, если то значеніе x, для котораго надобно

проинтерполировать, находится между x и $x+h$, можно воспользоваться значеніями отъ u_{x-3h} до u_{x+3h}; таблица значеній u_x и разностей его будетъ такая:

$$
\left.\begin{array}{lllllll}
u_{x-3h} & & & & & & \\
 & \Delta u_{x-3h} & & & & & \\
u_{x-2h} & & \Delta^2 u_{x-3h} & & & & \\
 & \Delta u_{x-2h} & & \Delta^3 u_{x-3h} & & & \\
u_{x-h} & & \Delta^2 u_{x-2h} & & \Delta^4 u_{x-3h} & & \\
 & \Delta u_{x-h} & & \Delta^3 u_{x-2h} & & \Delta^5 u_{x-3h} & \\
\hline
u_x & & \Delta^2 u_{x-h} & & \Delta^4 u_{x-2h} & & \Delta^6 u_{x-3h}. \\
\hline
 & \Delta u_x & & \Delta^3 u_{x-h} & & \Delta^5 u_{x-2h} & \\
u_{x+h} & & \Delta^2 u_x & & \Delta^4 u_{x-h} & & \\
 & \Delta u_{x+h} & & \Delta^3 u_x & & & \\
u_{x+2h} & & \Delta^2 u_{x+h} & & & & \\
 & \Delta u_{x+2h} & & & & & \\
u_{x+3h} & & & & & &
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

Изъ формулы Ньютона можно вывести двѣ формулы, которыя будутъ содержать разности этой таблицы, прилежащія либо къ горизонтальной чертѣ, проведенной въ этой таблицѣ между u_x и Δu_x, либо къ горизонтальной чертѣ, проведенной между u_x и Δu_{x-h}. Для полученія первой изъ этихъ формулъ, надобно ввести въ формулу (1) § 50 вмѣсто Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$ и т. д. ихъ выраженія чрезъ всѣ разности до прилегающихъ къ чертѣ, проведенной между u_x и Δu_x, именно слѣдующія:

$$\Delta^2 u_x = \Delta^2 u_{x-h} + \Delta^3 u_{x-h};$$
$$\Delta^3 u_x = \Delta^3 u_{x-h} + \Delta^4 u_{x-2h} + \Delta^5 u_{x-2h};$$
$$\Delta^4 u_x = \Delta^4 u_{x-2h} + 2\Delta^5 u_{x-2h} + \Delta^6 u_{x-3h} + \Delta^7 u_{x-3h}; \ ^{*)}$$
$$\Delta^5 u_x = \Delta^5 u_{x-2h} + 2\Delta^6 u_{x-3h} + 3\Delta^7 u_{x-3h} + \Delta^8 u_{x-4h} + \Delta^9 u_{x-4h}; \ ^{**)}$$

и т. д.

---

*) ибо $\Delta^6 u_{x-2h} = \Delta^6 u_{x-3h} + \Delta^7 u_{x-3h}$,

**) ибо кромѣ предыдущаго:

$$\Delta^7 u_{x-2h} = \Delta^7 u_{x-3h} + \Delta^8 u_{x-3h} = \Delta^7 u_{x-3h} + \Delta^8 u_{x-4h} + \Delta^9 u_{x-4h} :$$

такъ какъ $\Delta^8 u_{x-3h} = \Delta^8 u_{x-4h} + \Delta^9 u_{x-4h}$.

Подставляя это въ формулу (1) § 50, получимъ для коэффиціента при $\triangle^2 u_{x-h}$:

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{1.2};$$

для коэффиціента при $\triangle^3 u_{x-h}$:

$$C_2^n + C_3^n = C_3^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3};$$

для коэффиціента при $\triangle^4 u_{x-2h}$:

$$C_3^n + C_4^n = C_4^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4};$$

для коэффиціента при $\triangle^5 u_{x-2h}$:

$$C_3^n + 2C_4^n + C_5^n = \left(C_3^n + C_4^n\right) + \left(C_4^n + C_5^n\right) = C_4^{n+1} + C_5^{n+1} =$$

$$= C_5^{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5};$$

для коэффиціента при $\triangle^6 u_{x-3h}$:

$$C_4^n + 2C_5^n + C_6^n = C_5^{n+1} + C_6^{n+1} =$$

$$= C_6^{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6};$$

для коэффиціента при $\triangle^7 u_{x-3h}$ также точно найдемъ:

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

Законъ коэффиціентовъ уже ясенъ, и наша формула (1) § 50 обратится въ такую:

$$\left.\begin{aligned}u_{x+nh}=u_x+n\Delta u_x+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2u_{x-h}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3u_{x-h}+\\+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\Delta^4u_{x-2h}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}\Delta^5u_{x-2h}+\\+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6u_{x-3h}+\\+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6.7}\Delta^7u_{x-3h}+\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

и т. д.

Подставляя сюда $\frac{X-x}{h}$ вмѣсто n, будемъ имѣть искомую формулу:

$$\left.\begin{aligned}u_X=u_x+\frac{X-x}{1.h}\Delta u_x+\frac{(X-x)(X-x-h)}{1.2.h^2}\Delta^2u_{x-h}+\\+\frac{(X-x+h)(X-x)(X-x-h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3u_{x-h}+\\+\frac{(X-x+h)(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)}{1.2.3.4.h^4}\Delta^4u_{x-2h}+\\+\frac{(X-x+2h)(X-x+h)(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)}{1.2.3.4.5.h^5}\Delta^5u_{x-2h}+\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

и т. д.

которая вычисляется на практикѣ въ томъ же порядкѣ, какъ и Ньютонова формула.

Отсюда легко получить и ту, въ которую входятъ разности, прилегающія къ чертѣ, проведенной между u_x и Δu_{x-h}. Для этого стоитъ только замѣтить, что

$$\Delta u_x=\Delta u_{x-h}+\Delta^2u_{x-h};$$

$$\Delta^3u_{x-h}=\Delta^3u_{x-2h}+\Delta^4u_{x-2h};$$

$$\Delta^5u_{x-2h}=\Delta^5u_{x-3h}+\Delta^6u_{x-3h};$$

и т. д.

Когда изъ этихъ формулъ внесемъ въ (2), то увидимъ, что коэффиціенты разностей нечетнаго порядка останутся тѣже; къ каждому же коэффиціенту разности четнаго порядка прибавится предшествующій ему коэффиціентъ, и какъ

$$C_q^p + C_{q+1}^p = C_{q+1}^{p+1},$$

то формула (2) перейдетъ въ такую:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u_{x+nh} = u_x + \frac{n}{1h}\Delta u_{x-h} + \frac{(n+1)n}{1.2\,h^2}\Delta^2 u_{x-h} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 u_{x-2h} + \\ + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4.h^4}\Delta^4 u_{x-2h} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.h^5}\Delta^5 u_{x-3h} + \\ + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.6.h^6}\Delta^6 u_{x-3h} + \\ + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6.7.h^7}\Delta^7 u_{x-4h} + \end{aligned}\right.$$

и т. д.

подставляя сюда $\frac{X-x}{h}$ вмѣсто n, будемъ имѣть:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} u_X = u_x + \frac{X-x}{1.h}\Delta u_{x-h} + \frac{(X-x+h)(X-x)}{1.2.h^2}\Delta^2 u_{x-h} + \\ + \frac{(X-x+h)(X-x)(X-x-h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 u_{x-2h} + \\ + \frac{(X-x+2h)(X-x+h)(X-x)(X-x-h)}{1.2.3.4.h^4}\Delta^4 u_{x-2h} + \\ + \frac{(X-x+2h)(X-x+h)(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)}{1.2.3.4.5.h^5}\Delta^5 u_{x-3h} + \end{aligned}\right.$$

и т. д.

Замѣтимъ, что часто на практикѣ для увеличенія точности, въ послѣднемъ членѣ формулъ (3) и (5) вмѣсто показанной нами разности берутъ среднюю ариѳметическую изъ обоихъ значеній этой разности, прилегающихъ съ обѣихъ сторонъ къ упомянутой выше чертѣ.

53. Возьмемъ для поясненія формулы (3) пред. § тотъ же примѣръ § 51. Теперь x будетъ $= 6$, а $X = 5$; слѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l} \frac{X-x}{h}=\frac{1}{2}=0{,}5\,;\quad \frac{X-x-h}{2\,.\,h}=-\frac{1}{4}=-0{,}25\,;\quad \frac{X-x+h}{3\,.\,h}=\frac{1}{2}=0{,}5\,; \\ \qquad\qquad \frac{X-x-2h}{4\,.\,h}=-\frac{3}{8}==0{,}375\,; \end{array}\right\} \quad (1)$$

по сдѣланному выше (§ 48) замѣчанію мы ограничиваемся четвертыми разностями, но беремъ ихъ полусумму:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^4 u_{x-2h}+\Delta^4 u_{x-h}\right)=\frac{10'',1+4'',7}{2}=7'',4\,; \qquad (2)$$

помножаемъ на	$\times \frac{X-x-2h}{4h} = -0{,}375$
получаемъ:	$-\ 2'',8$
придаемъ:	$+\Delta^3 u_{x-h} = +2'54'',5$
получаемъ:	$+2'51'',7$
помножаемъ на	$\times \frac{X-x+h}{3h} = 0{,}5$
получаемъ:	$+\ 1'25'',9$
придаемъ:	$+\Delta^2 u_{x-h} = +21'32'',4$
получаемъ:	$+22'58'',3$
	$\times \frac{X-x-h}{2h} = -0{,}25$
	$-5'44'',6$
	$+\Delta u_x = +7^0 22'10'',4$
	$+7^0 16'25'',8$
	$+u_x = +317^0\ 7'29'',5$
искомая долгота	$= +320^0 45'42'',4.$

$\times \frac{X-x}{h} = 0{,}5$

$+3^0 38' 12'',9$

Если желаемъ вычислить туже долготу по формулѣ (5) предыдущаго §, мы положимъ $x = 6$, а $X = 5$; тогда будетъ:

$$\frac{X-x}{h}=-\frac{1}{2}=-0{,}5\,;\quad \frac{X-x+h}{2\,.\,h}=\frac{1}{4}=0{,}25\,;$$

$$\frac{X-x-h}{3h}=-\frac{3}{6}=-0{,}5\,;\quad \frac{X-x+2h}{4\,.\,h}=+\frac{3}{8}=+0{,}375\,;$$

беремъ: $\frac{1}{2}\left(\Delta^4 u_{x-2h}+\Delta^4 u_{x-h}\right)=\frac{10'',1+4',7}{2}=+7'',4$

помножаемъ на	$\frac{X-x+2h}{4\,.\,h}=+0{,}375$
получаемъ:	$+2'',8$
придаемъ:	$\Delta^3 u_{x-2h}=+2'54'',5$
получаемъ:	$+2'57'',3$
помножаемъ на	$\frac{X-x-h}{3h}=-0{,}5$
получаемъ:	$-\ 1'28'',6$
придаемъ:	$\Delta^2 u_{x-h}=+24'26'',9$
получаемъ:	$+22'58'',3$
	$\times\frac{X-x+h}{2h}=+0{,}25$
	$+5'44'',6$
	$+\Delta\, u_{x-h}=+7^0 22'10'',4$
	$+7^0 27'55'',0$
	$\times\frac{X-x}{h}=-0{,}5$
	$-3^0 43'57'',5$
	$u_x=+324^0 29'39'',9$
искомая долгота	$=+320^0 45'42'',4.$

Примѣчаніе. При вычисленіи по формуламъ (3) и (5) предыдущаго § можно не обращать вниманія на знаки, а поправлять каждую разность такъ, чтобы она приближалась къ стоящей по другую сторону горизонтальной черты, проведенной какъ сказано выше. Въ самомъ дѣлѣ, вычисляя по первой формулѣ, къ разности порядка $2k-1$ мы придаемъ:

$$\frac{X-x-kh}{2k.h}\,\Delta^{2k} u_{x-kh}=\frac{X-x-kh}{2k.h}\left(\Delta^{2k-1} u_{x-\overline{k-1}h}-\Delta^{2k-1} u_{x-kh}\right);$$

но, какъ

$$\frac{X-x-kh}{2k.h}<0\,,$$

ибо $X-x<h$, то знакъ будетъ противенъ знаку второго множителя; потому, если

$$\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k-1}h}\gtrless\Delta^{2k-1}u_{x-kh}\,,$$

то будетъ

$$\text{поправленная }\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k-1}h}\lessgtr\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k-1}h}\,,$$

слѣдовательно приблизится къ стоящей по другую сторону черты разности того же порядка. Къ разности же четнаго порядка $\Delta^{2k}u_{x-kh}$ прибавляемъ

$$\frac{X-x+kh}{(2k+1)h}\Delta^{2k+1}u_{x-kh}=\frac{X-x+kh}{(2k+1)h}\left(\Delta^{2k}u_{x-\overline{k-1}h}-\Delta^{2k}u_{x-kh}\right);$$

но какъ здѣсь

$$\frac{X-x+kh}{(2k+1)h}>0\,;$$

то знакъ поправки будетъ одинаковъ со знакомъ второго множителя, и потому, если

$$\Delta^{2k}u_{x-\overline{k-1}h}\gtrless\Delta^{2k}u_{x-kh}\,,$$

то также будетъ

$$\text{поправленная }\Delta^{2k}u_{x-kh}\gtrless\Delta^{2k}u_{x-kh}\,,$$

слѣдовательно опять приблизится къ стоящей по другую сторону черты.

Вычисляя по второй формулѣ, къ разности нечетнаго порядка $\Delta^{2k-1}u_{x-kh}$ придаемъ

$$\frac{X-x+kh}{2k.h}\Delta^{2k}u_{x-kh}=\frac{X-x+kh}{2k.h}\left(\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k-1}h}-\Delta^{2k-1}u_{x-kh}\right);$$

здѣсь $x - X < h$, а потому первый множитель положительный, вслѣдствіе чего, если

$$\triangle^{2k-1} u_{x-\overline{k+1}h} \gtrless \triangle^{2k-1} u_{x-kh},$$

то и

$$\text{поправленная } \triangle^{2k-1} u_{x-kh} \gtrless \triangle^{2k-1} u_{x-kh},$$

и слѣдовательно приближается къ стоящей по другую сторону черты. Къ разности четнаго порядка $\triangle^{2k} u_{x-kh}$ въ этомъ случаѣ придается

$$\frac{X-x-kh}{(2k+1)h} \triangle^{2k+1} u_{x-\overline{k+1}h} = \frac{X-x-kh}{(2k+1)h}\left(\triangle^{2k} u_{x-kh} - \triangle^{2k} u_{x-\overline{k+1}h}\right);$$

но такъ какъ первый множитель здѣсь отрицательный, то, если

$$\triangle^{2k} u_{x-kh} \gtrless \triangle^{2k} u_{x-\overline{k+1}h},$$

будетъ

$$\text{поправленная } \triangle^{2k} u_{x-kh} \lessgtr \triangle^{2k} u_{x-kh},$$

слѣдовательно тоже приблизится къ стоящей по другую стороны черты разности того же порядка.

54. Для того частнаго случая, довольно часто встрѣчающагося на практикѣ, когда требуется (какъ въ нашемъ примѣрѣ) вычислить значеніе функціи для $X = x + \frac{1}{2}h$, можно вывести изъ соединенія этихъ формулъ новую, которая скорѣе будетъ давать искомую величину. Перепишемъ формулу (3) § 49 въ такомъ видѣ:

$$(1)\left\{\begin{aligned} u_X = u_x + \frac{X-x}{1.h}\Big\{\triangle u_x + \frac{X-x-h}{2.h}\Big\{\triangle^2 u_{x-h} + \frac{X-x+h}{3.h}\Big\{\triangle^3 u_{x-h} + \\ + \frac{X-x-2h}{4.h}\Big\{\triangle^4 u_{x-2h} + \frac{X-x+2h}{5.h}\Big\{\triangle^5 u_{x-2h} + \dots\Big\}\Big\}\dots\Big\}, \end{aligned}\right.$$

и также представимъ и формулу (5), перемѣнивъ предварительно въ ней x на $x+h$:

$$\left.\begin{array}{l} u_X = u_{x+h} + \dfrac{X-x-h}{h}\Big\{\triangle u_x + \dfrac{X-x}{2.h}\Big\{\triangle^2 u_x + \dfrac{X-x-2h}{3.h}\Big\{\triangle^3 u_{x-h} + \\ \quad + \dfrac{X-x+h}{4.h}\Big\{\triangle^4 u_{x-h} + \dfrac{X-x-3h}{5.h}\Big\{\triangle^5 u_{x-2h} + \ldots\Big\}\Big\}\ldots\Big\}. \end{array}\right\} (2)$$

Положимъ теперь $X = x + \frac{1}{2}h$ въ обѣихъ формулахъ; получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} u_{x+\frac{1}{2}h} = u_x + \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle u_x - \dfrac{1}{4}\Big\{\triangle^2 u_{x-h} + \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle^3 u_{x-h} - \\ \quad - \dfrac{3}{8}\Big\{\triangle^4 u_{x-2h} + \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle^5 u_{x-2h} + \ldots\Big\}\Big\}\ldots\Big\}; \end{array}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{x+\frac{1}{2}h} = u_{x+h} - \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle u_x + \dfrac{1}{4}\Big\{\triangle^2 u_x - \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle^3 u_{x-h} + \\ \quad + \dfrac{3}{8}\Big\{\triangle^4 u_{x-h} - \dfrac{1}{2}\Big\{\triangle^5 u_{x-2h} + \ldots\Big\}\Big\}\ldots\Big\}; \end{array}\right\} \ldots (4)$$

легко видѣть, что по раскрытіи скобокъ коэффиціенты при разностяхъ нечетнаго порядка будутъ равны, но съ противнымъ знакомъ, тогда какъ коэффиціенты разностей четнаго порядка будутъ равны и одинаковаго знака; но значенія x будутъ въ разностяхъ четнаго порядка не одинаковыя. Вслѣдствіе этого, взявъ полусумму (3) и (4), мы получимъ формулу, изъ которой исчезнутъ разности нечетнаго порядка, а вмѣсто разностей четнаго порядка войдутъ полусуммы изъ тѣхъ значеній ихъ, которыя въ нашей табличкѣ прилегаютъ съ обѣихъ сторонъ къ горизонтальной чертѣ, проведенной чрезъ промежутокъ, гдѣ лежитъ данное значеніе x, для котораго производится интерполированіе. Эта формула будетъ:

$$\left.\begin{array}{l} u_{x+\frac{1}{2}h} = \dfrac{1}{2}\left(u_x + u_{x+h}\right) - \dfrac{1}{8}\Big\{\dfrac{1}{2}\left(\triangle^2 u_{x-h} + \triangle^2 u_x\right) - \\ \quad - \dfrac{3}{16}\Big\{\dfrac{1}{2}\left(\triangle^4 u_{x-2h} + \triangle^4 u_{x-h}\right) - \ldots\Big\}\Big\}\ldots\Big\}. \end{array}\right\} \ldots (5)$$

Примѣнимъ эту формулу къ тому же примѣру. Беремъ полусумму четвертыхъ разностей, прилегающихъ къ чертѣ:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^4 u_{x-2h} + \Delta^4{}_{x-h}\right) = +7'',4$$

помножаемъ на $-\frac{3}{16}$,

получаемъ: $-1'',3$;

придаемъ: $\frac{1}{2}\left(\Delta^2 u_{x-h} + \Delta^2 u_x\right) = +22'59'',7$,

получаемъ: $+22'58'',4$;

помножаемъ на $-\frac{1}{8}$,

получаемъ: $-2'52'',3$;

придаемъ: $\frac{1}{2}\left(u_x + u_{x+h}\right) = +320^0 48'34'',7$;

получаемъ: $+320^0 45'42'',4$.

55. Разсмотрѣнная задача, которую можно и такъ выразить: между двумя послѣдовательными значеніями u_x вставить среднее, т. е. для того значенія x, которое лежитъ по срединѣ промежутка отъ x до $x+h$, представляетъ частный случай другой болѣе общей задачи: раздѣлить первоначальный промежутокъ отъ x до $x+h$ на $k+1$ равныхъ частей и вычислить значенія u_x для получаемыхъ такимъ образомъ k промежуточныхъ между x и $x+h$ значеній. Необходимость подраздѣлять интервалы значеній x какой либо таблицы значеній u_x представляется иногда на практикѣ, преимущественно въ астрономіи. Леверье (Leverier) въ I томѣ „Annales d'Observatoire imperiale de Paris" показалъ какъ можно рѣшить эту задачу; къ этой статьѣ Леверье мы и отсылаемъ интересующихся этой задачей.

56. Интерполированіе представляетъ и обратную задачу: имѣя рядъ значеній функціи:

(1) $$u_x,\ u_{x+h},\ u_{x+2h} \ldots u_{x+nh},$$

отвѣчающихъ даннымъ значеніямъ независимой перемѣнной:

$$x,\ x+h,\ x+2h, \ldots x+nh,$$

найти при какомъ значеніи x_0 независимой перемѣнной функція принимаетъ данное значеніе a. По формулѣ Ньютона для интерполированія имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} a=u_X=u_x+\frac{X-x}{h}\Delta u_x+\frac{(X-x)(X-x-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 u_x+\dots \\ \dots+\frac{(X-x)(X-x-h)\dots(X-x-\overline{n-2}h)}{1.2.3\dots n}\Delta^n u_x; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

изъ этого уравненія и надобно найти то значеніе x, при которомъ $u_X=a$. Но здѣсь одинъ изъ корней уже отдѣленъ; дѣйствительно, если

$$u_{x+kh}<a<u_{x+\overline{k+1}h}, \quad (2)$$

то корень x_0 будетъ удовлетворять неравенствамъ:

$$x+kh<x_0<x+\overline{k+1}h; \quad (3)$$

слѣдовательно, если внутри этого промежутка функція все растетъ, то она только одинъ разъ можетъ сдѣлаться равною a, т. е. для одного значенія x_0, слѣдовательно $x+kh$ и $x+\overline{k+1}\,h$ будутъ частными предѣлами этого корня; остается въ такомъ случаѣ только сблизить ихъ. Это можно сдѣлать, дѣля интервалъ этотъ пополамъ и вычисляя (по формулѣ пред. §) значеніе u_X для $X=x+\overline{k+\frac{1}{2}}h$; затѣмъ подраздѣляя на два меньшія тотъ изъ двухъ интерваловъ, на которые раздѣлится первоначальный, въ которомъ по сравненію съ a величины $u_{x+\overline{k+\frac{1}{2}}h}$ окажется долженствующимъ лежать x_0; затѣмъ также поступая съ тѣмъ изъ имѣющихъ получиться, въ которомъ долженъ находиться x_0, и продолжая это до тѣхъ поръ, пока разность между обоими предѣлами этого корня не будетъ меньше допускаемой погрѣшности, мы найдемъ x_0 съ требуемой точностью. Можно приближаться къ корню и другимъ способомъ, болѣе употребительнымъ на практикѣ. Легко получить изъ (1):

$$\frac{X-x}{h}=\frac{a-u_x}{\Delta u_x+\frac{X-x-h}{1.2.h}\Delta^2 u_x+\dots+\frac{(X-x-h)\dots(X-x-\overline{n-1}h)}{1.2.3\dots nh^{n-1}}\Delta^n u_x}; \quad (2)$$

обыкновенно за x берутъ нижній предѣлъ; если разности второго и высшихъ порядковъ достаточно малы, то для перваго приближенія отбрасываютъ въ знаменателѣ всѣ члены, начиная со второго, и получаютъ:

$$X_1=x+h\frac{a-u_x}{\Delta u_x}; \quad (3)$$

это значеніе вставляютъ въ знаменатель, въ которомъ удерживаютъ только первые два члена; такимъ образомъ получаютъ второе приближенное значеніе корня:

$$(4) \qquad X_2 = x + h \frac{a - u_x}{\Delta u_x + \frac{X_1 - x - h}{2 \cdot h} \Delta^2 u_x};$$

это значеніе корня вставляютъ опять въ знаменатель (2), удерживая опять лишь первые два члена, что доставитъ третье приближенное значеніе корня:

$$(5) \qquad X_3 = x + h \frac{a - u_x}{\Delta u_x + \frac{X_2 - x - h}{2 \cdot h} \Delta^2 u_x},$$

и это продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока удерживаемые десятичные знаки не перестанутъ измѣняться. Мы пояснимъ лишь этотъ послѣдній способъ примѣромъ, именно найдемъ, когда для Берлинскаго меридіана въ 1850 году долгота Меркурія была $= 320^0 48' 34'', 7$.

Изъ (2), отбрасывая въ знаменателѣ всѣ члены, начиная съ третьяго, и внося вмѣсто u_x, Δu_x, $\Delta^2 u_x$ ихъ значенія изъ таблицы долготъ Меркурія (§ 51), мы будемъ имѣть такую формулу для вычисленія послѣдовательныхъ приближеній, принимая $x = 4$:

$$X = 4 + 2 \frac{320^0 48' 34'', 7 - 317^0 7' 29'', 5}{7^0 22' 10'', 3 + \frac{X - 4 - 2}{2 \cdot 2} 24' 26'', 5}$$

т. е.

$$(6) \qquad X = 4 + 2 \frac{3^0 41' 5'', 2}{7^0 22' 10'', 4 + \frac{X - 6}{4} 24' 26'', 9}.$$

Отбрасывая для перваго приближенія второй членъ знаменателя, получимъ:

$$X_1 = 4 + \frac{7^0 22' 10'', 4}{7^0 22' 10'', 4} = 5,$$

согласно съ прежде полученнымъ результатомъ. Чтобы получить второе приближеніе, мы полагаемъ въ знаменателѣ формулы (6) $X = 5$; будемъ имѣть:

$$X_2 = 4 + \frac{7^0 22' 10'',4}{7^0 22' 10'',4 - \frac{1}{4}\, 24' 26'',6} = 4 + \frac{26530'',4}{26163'',7} =$$

$$= 4 + 1{,}01401 = 5{,}01401\,;$$

слѣдовательно второе приближеніе

$$X_2 = 5 \text{ сут. } 20' 10'' 46\,.$$

Если требуется найти съ точностью до одного часа, то видимъ отсюда, что перваго приближенія уже достаточно; если же требуется точность до одной минуты, тогда надобно найти и третье приближеніе, которое будетъ:

$$X_3 = 4 + \frac{26530'',4}{26530'',4 - 0{,}01401\,.\,1466'',9} =$$

0,24650

$$= 5{,}01640 \text{ с. } = 5^c\, 0^ч 23' 36'',9\,;$$

$= 5.013814 = 5^c\, 0^ч\, 19' 53'',5$

слѣдовательно потребуется въ этомъ случаѣ 4-ое приближеніе, а можетъ быть и пятое; предоставляемъ это читателю рѣшить самому.

57. Изъ формулы Ньютона для интерполированія совмѣстно съ формулою Тэйлора можно вывести формулы для интеполированія производныхъ разнаго порядка. Для этого стоитъ только разложить первую по степенямъ $X - x$ и сравнить со второю:

$$u_X = u_x + \frac{du_x}{dx}(X - x) + \frac{d^2 u_x}{dx^2}\frac{(X - x)^2}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{d^n u_x}{dx^n}\frac{(X - x)^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\,;$$

тогда сравненіе коэффиціентовъ одинаковыхъ степеней $X - x$ въ обѣихъ формулахъ доставитъ искомыя формулы для интерполированія производныхъ. Понятно, что эти формулы будутъ точными лишь для $u_x =$ полиному степени n; для всѣхъ другихъ функцій будутъ лишь приблизительныя. Мы ограничимся однако лишь этимъ указаніемъ, предоставляя вывести эти формулы читателю самому.

58. Формула Ньютона рѣшаетъ задачу параболическаго интерполированія въ случаѣ, когда данныя значенія x образуютъ ариѳметическую прогрессію; формула Лагранжа рѣшаетъ ту же задачу въ болѣе общемъ случаѣ неравныхъ промежутковъ между послѣдовательными

значеніями независимой перемѣнной. Пусть значеніямъ независимой перемѣнной:

(1) $$x_0,\ x_1,\ x_2, \dots x_n$$

отвѣчаютъ значенія функціи:

(2) $$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \dots u_n,$$

гдѣ для краткости написано u_k вмѣсто u_{x_k}.

Положимъ

(3) $$F(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n);$$

тогда, означая чрезъ $f(x)$ какой либо полиномъ степени n, будемъ имѣть, какъ то извѣстно изъ теоріи разложенія раціональныхъ дробей на простѣйшія, слѣдующую формулу:

(4) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \cdot \frac{1}{x - x_i},$$

откуда

(5) $$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \cdot \frac{F(x)}{x - x_i}.$$

Примемъ теперь

$$f(x_i) = u_i;$$

$$[i = 0, 1, 2, \dots n],$$

тогда будетъ

(6) $$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{F'(x_i)} \cdot \frac{F(x)}{x - x_i}$$

требуемая функція, т. е. функція степени n, принимающая для данныхъ значеній x [рядъ (1)] соотвѣтственно данныя значенія u_x [рядъ (2)]. Дѣйствительно полагая $x = x_k$, всѣ члены суммы обратятся въ нуль, для которыхъ i не $= k$, ибо тогда

$$\frac{F(x_k)}{x_k - x_i} = 0;$$

членъ же, для котораго $i = k$, обратится въ $\frac{0}{0}$, ибо

$$\frac{F(x_k)}{x_k - x_k} = \frac{0}{0};$$

но, раскрывая эту неопредѣленность по правиламъ дифференціальнаго исчисленія, мы найдемъ:

$$\left.\frac{F(x)}{x - x_k}\right|_{x=x_k} = \frac{F'(x_k)}{1} = F'(x_k);$$

слѣдовательно этотъ членъ будетъ

$$\left.\frac{u_x}{F'(x_k)} \cdot \frac{F(x)}{x - x_k}\right|_{x=x_k} = u_k,$$

т. е.

$$f(x_k) = u_k,$$

какъ и требуется. Что это есть полиномъ степени n, то это слѣдуетъ изъ того, что степень $\frac{F(x)}{x - x_i}$ есть n; коэффиціентъ же при x^n, во всей суммѣ, т. е.

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{F'(x_i)} \text{ не} = 0,$$

какъ то извѣстно изъ теоріи разложенія раціональныхъ дробей на простѣйшія. Впрочемъ это прямо будетъ видно, если, замѣтивъ, что

$$F'(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n),$$

и

$$\frac{F(x)}{x - x_k} = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

напишемъ формулу (6) in extenso такимъ образомъ:

$$(7)\qquad f(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,u_i.$$

Это и есть *формула Лагранжа.*

59. Если степень m полинома, которымъ желаемъ представить неизвѣстную функцію, которой даны $n+1$ значеній для такого же числа значеній независимой перемѣнной, меньше числа этихъ значеній болѣе чѣмъ на единицу, то задача наша при произвольно-выбранныхъ значеніяхъ функціи невозможна. Въ такомъ случаѣ обыкновенно подчиняютъ искомый полиномъ тому условію, чтобы сумма квадратовъ *погрѣшностей*, т. е. разностей между данными значеніями функціи и значеніями полинома для тѣхъ же соотвѣтственно значеній независимой перемѣнной, была наименьшая. Если искомый полиномъ есть

$$(1)\qquad F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m,$$

то $F(x_i)-u_i$ будетъ погрѣшность, съ которою этотъ полиномъ даетъ для искомой функціи требуемое значеніе u_i при $x=x_i$, и коэффиціенты его опредѣлятся тогда изъ условія, чтобы функція коэффиціентовъ $a_0, a_1, a_2 \ldots . a_m$:

$$(2)\qquad V=\sum_{i=0}^{i=n}\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-u_i\right)^2,$$

представляющая сумму квадратовъ погрѣшностей, была minimum. Здѣсь данныя значенія независимой перемѣнной и функціи обозначены какъ и въ предыдущемъ §.

Для нахожденія такихъ значеній $a_0, a_1, \ldots . a_m$, при которыхъ V будетъ имѣть наименьшее значеніе, мы должны по правиламъ дифференціальнаго исчисленія приравнять нулю частныя производныя отъ V по этимъ величинамъ; это дастъ намъ $m+1$ уравненій такого вида:

$$(3)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{i=n}\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-u_i\right)x_i^k=0,$$

$$[k=0,1,2,\ldots m]$$

или, дѣля на 2, раскрывая скобки и перенося послѣдній членъ на право:

$$a_0\sum_{i=0}^{i=n}x_i^k + a_1\sum_{i=0}^{i=n}x_i^{k+1} + a_2\sum_{i=0}^{i=n}x_i^{k+2} + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{i=n}x_i^{k+m} = \sum_{i=0}^{i=n}u_ix_i^k \qquad (4)$$

$$[k=0,1,2,\ldots m].$$

Рѣшая эту систему $m+1$ уравненій по $m+1$ неизвѣстнымъ a_0, a_1, ... a_m и получимъ ихъ значенія, представляемыя формулою:

$$a_g = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \ldots\ldots \sum_{i=0}^{i=n}u_ix_i^g \ldots\ldots\ldots S_m \\ S_1 & S_2 & S_3 \ldots\ldots \sum_{i=0}^{i=n}u_ix_i^{g+1} \ldots\ldots S_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} \ldots \sum_{i=1}^{i=n}u_ix_i^{g+m-1} \ldots S_{2m} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

гдѣ

$$\triangle = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots\ldots S_g \ldots\ldots S_m \\ S_1 & S_2 \ldots\ldots S_{g+1} \ldots S_{m+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_m & S_{m+1} \ldots S_{m+g} \ldots S_{2m} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

и

$$S_p = \sum_{i=0}^{i=n}x_i^p. \qquad (7)$$

На практикѣ предпочитаютъ, слѣдуя Гауссу, рѣшать эти уравненія, преобразовавши данную систему въ другую, въ которой одно уравненіе содержало бы одну неизвѣстную, другое двѣ, третье три и т. д., послѣднее $m+1$, чего какъ извѣстно можно достигнуть, исключая сперва одну неизвѣстную изъ всѣхъ уравненій, за исключеніемъ одного,

затѣмъ изъ всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ за исключеніемъ одного еще одну и т. д., пока не останется одно уравненіе съ одной неизвѣстной; рѣшая послѣднее и подставляя въ предыдущія, затѣмъ послѣднее изъ полученныхъ такимъ образомъ и подставляя въ остальныя изъ нихъ, и продолжая это до тѣхъ поръ пока не дойдемъ до перваго уравненія, изъ котораго найдется послѣдняя неизвѣстная, мы будемъ имѣть значенія всѣхъ неизвѣстныхъ. Выписывать систему преобразованныхъ такимъ образомъ изъ (4) уравненій мы не считаемъ необходимымъ.

60. Что касается до самого наименьшаго значенія V (2), то оно найдется легко такимъ образомъ.

Положимъ, для краткости

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m; \tag{1}$$

тогда

$$V = \sum_{i=0}^{i=n} \Big(F(x_i) - u_i\Big)^2, \tag{2}$$

что можно и такъ написать

$$V = \sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\Big(F(x_i) - u_i\Big) - \sum_{i=0}^{i=n} u_i \Big(F(x_i) - u_i\Big); \tag{3}$$

но изъ (3), которое теперь такъ напишется:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i) - u_i\Big) x_i^k = 0, \tag{4}$$

$$[k = 0, 1, 2, 3 \ldots m],$$

помножая на a_k и суммируя по k отъ 0 до m, получимъ, такъ какъ по (1)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=m} a_k x^k, \tag{5}$$

слѣдующее:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)F_i(x_i)=0\,; \tag{6}$$

на основаніи этого равенство (3) приведется къ такому:

$$V=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(u_i^2-F(x_i)u_i\Big)\,, \tag{7}$$

или по (5):

$$V=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(u_i^2-\sum_{k=0}^{k=m}a_k x_i^k u_i\Big)\,,$$

или

$$V=\sum_{i=0}^{i=n}u_i^2-\sum_{k=0}^{k=m}a_k\sum_{i=0}^{i=m}x_i^k u_i\,; \tag{8}$$

такимъ образомъ это наименьшее значеніе V выражается линейно чрезъ коэффиціенты полинома $F(x)$ и найдется, когда они будутъ найдены.

61. Величина, получаемая отсюда чрезъ дѣленіе на $n+1$ (число данныхъ значеній функціи) и извлеченіе квадратнаго корня, именно

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{i=n}u_i^2-\sum_{k=0}^{k=m}a_k\sum_{i=0}^{i=n}u_i x_i^k\right\}}\,, \tag{1}$$

называется *среднею вѣроятною погрѣшностью* (erreur moyenne à craindre); если она превосходитъ ту, которую можно допустить, то это служитъ указаніемъ на то, что искомая функція не можетъ быть съ требуемымъ приближеніемъ представлена полиномомъ степени m; въ такомъ случаѣ надобно испробовать, нельзя ли представить ее полиномомъ степени непосредственно высшей, т. е. $m+1$, для чего пришлось бы передѣлать всѣ вычисленія вновь, что было бы весьма утомительно. Академикъ П. Л. Чебышевъ далъ другой способъ параболическаго интерполированія, не требующій, чтобы степень полинома была впередъ задана; мы изложимъ этотъ способъ въ слѣдующихъ §§.

62. Если мы хотимъ прибавить къ искомому полиному одинъ слѣдующій членъ $a_{m+1}x^{m+1}$, то трактуя новый полиномъ какъ прежній, мы получимъ систему уравненій вида (4) § 59, но съ однимъ членомъ

лишнимъ противъ тѣхъ, и числомъ самихъ уравненій на единицу большимъ; отсюда и для коэффиціентовъ нисшихъ степеней должны получиться другія значенія; слѣдовательно поправка къ найденному изъ (4) полиному $F(x)$ будетъ состоять изъ *полинома* степени $m+1$, который мы означимъ, вынося за скобки коэффиціентъ A_{m+1} наивысшаго его члена, чрезъ

у А.А. Маркова $\psi_{m+1}(x)$ обозначено через $\varphi_{m+1}(x)$

$$(1) \qquad A_{m+1}\,\psi_{m+1}(x),$$

$\psi_{m+1}(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots + a'_{m-1} x^{m-1} + a'_m x^m + 1.x^{m+1}$

(гдѣ коэффиціентъ при x^{m+1} въ $\psi_{m+1}(x)$ слѣдовательно есть единица), такъ, что новый полиномъ, степени $m+1$, при помощи прежде найденнаго такъ выразится:

$$(2) \qquad F(x) + A_{m+1}\psi_{m+1}(x),$$

и прежняя функція V замѣнится такою:

$$(3) \qquad V = \sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i) + A_{m+1}\psi_{m+1}(x_i) - u_i\Big)^2;$$

коэффиціенты полинома $\psi_{m+1}(x)$ *) и A_{m+1} надобно опредѣлить изъ условія, чтобы V была minimum. Написавъ V такимъ образомъ:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n}\Big(A_{m+1}\psi_{m+1}(x_i) - \big(u_i - F(x_i)\big)\Big)^2,$$

мы, получимъ, дифференцируя по a'_k $(k = 0, 1, 2, 3, \dots m)$ и по A_{m+1}, и приравнивая результаты нулю, такую систему уравненій для ихъ опредѣленія:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{A_{m+1}}\cdot\frac{\partial V}{\partial a'_k} = \sum_{i=0}^{i=n}\Big(A_{m+1}\psi_{m+1}(x_i) - \big(u_i - F(x_i)\big)\Big)x_i^k = 0,$$

$$[k = 0, 1, 2, 3 \dots m],$$

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial A_{m+1}} = \sum_{i=0}^{i=n}\Big(A_{m+1}\psi_{m+1}(x_i) - \big(u_i - F(x_i)\big)\Big)\psi_{m+1}(x_i) = 0.$$

---

*) ихъ мы означимъ чрезъ a'_k $(k = 0, 1, 3 \dots m)$.

Но по (4) § 60:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)x_i^k=0\,; \tag{7}$$

на основаніи этого уравненіе (5) приведется къ такому (отбрасывая общій множитель всѣхъ членовъ A_{m+1}):

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i^k=0\,; \tag{8}$$

гдѣ $k=0\,,\,1\,,\,2\,,\,.\,.\,.\,m$; и это составляетъ полное число условій, необходимое и достаточное для полнаго опредѣленія полинома степени $m+1$, коэффиціентъ при наивысшей степени x въ которомъ равенъ единицѣ; уравненіе же (6) можно сперва такъ написать:

$$A_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_{m+1}(x_i)\Big)^2=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(u_i-F(x_i)\Big)\,\psi_{m+1}(x_i)\,; \tag{9}$$

но изъ (8), помножая его на коэффиціентъ при x^k въ $F(x)$, т. е. a_k, и суммируя по k отъ 0 до m, получимъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)F(x_i)=0\,; \tag{10}$$

на основаніи этого равенство (9) окончательно такъ представится:

$$A_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_{m+1}(x_i)\Big)^2=\sum_{i=0}^{i=n}u_i\psi_{m+1}(x_i). \tag{11}$$

Когда $\psi_{m+1}(x)$ будетъ опредѣлена, тогда отсюда получится A_{m+1}, именно мы найдемъ:

$$A_{m+1}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}u_i\psi_{m+1}(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}^2(x_i)}\,; \tag{12}$$

что же касается до $\psi_{m+1}(x)$, то она вполнѣ опредѣляется изъ условій (8) пред. § какъ увидимъ ниже.

63- 63. Эти условія можно обобщить: если $f(x)$ полиномъ степени не выше m, то

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)\psi_{m+1}(x_i)=0\,; \text{*)}$$

дѣйствительно, если

$$(2) \qquad f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_gx^g\,,\quad g\leqq m\,;$$

то (1) такъ можетъ быть написано:

$$b_0\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)+b_1\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i+\ldots+b_g\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i^g=0\,;$$

а это равно нулю тождественно, ибо каждый членъ по (8) пред. § отдѣльно равенъ нулю. Въ частности, полагая

$$f(x)=\psi_k(x)\,,$$

гдѣ $k\leq m$, и $\psi_k(x)$ полиномъ, обладающій подобнымъ же свойствомъ, по отношенію ко всякому полиному нисшей степени чѣмъ онъ, мы будемъ имѣть

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{i=n}\psi_k(x_i)\psi_{m+1}(x_i)=0\,.$$

Если же положимъ

$$f(x)=\psi_{m+1}(x)\,,$$

то, какъ $\psi_{m+1}(x)=x^{m+1}+\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ степени m, будетъ по (1):

---

*) (10) предыдущаго § представляетъ частный случай этого равенства.

$$\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_{m+1}(x_i)\Big)^2=\sum_{i=0}^{i=n}x_i^{m+1}\psi_{m+1}(x_i)\,; \qquad (4)$$

это очевидно не равно нулю, какъ сумма квадратовъ вещественныхъ величинъ.

64. На основаніи (3) пред. § и сдѣланнаго относительно (4) замѣчанія, можно всякій полиномъ степени $m+1$ разложить по функціямъ $\psi_k(x)$; дѣйствительно пусть

$$\phi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m+b_{m+1}x^{m+1} \qquad (1)$$

такой полиномъ; можно положить:

$$\phi(x)=B_0\psi_1(x)+B_1\psi_1(x)+B_2\psi_2(x)+\ldots+B_m\psi_m(x)+B_{m+1}\psi_{m+1}(x)\,, \quad (2)$$

(см. § 16); помножая на $\psi_k(x)$, полагая $x=x_i$, гдѣ $i=0,\ 1,\ 2\ldots n$, и складывая полученныя результаты, получимъ на основаніи (3) пред. §:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\phi(x_i)\psi_k(x_i)=B_k\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_k(x_i)\Big)^2,$$

откуда

$$B_k=\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\phi(x_i)\psi_k(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_k(x_i)\Big)^2}. \qquad (3)$$

65. Теперь мы въ состояніи доказать то предложеніе, что условіями (3) § 63 функція $\psi_{m+1}(x)$ опредѣляется до постояннаго множителя. Дѣйствительно; пусть кромѣ $\psi_{m+1}(x)$, также и $\phi(x)$—степени $(m+1)$ относительно x, удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, т. е. что

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_k(x_i)\phi(x_i)=0\,,$$

гдѣ $k=0,1,2,\ldots m$; по (2) пред. § это можно такъ написать:

$$B_0\sum_{i=0}^{i=n}\psi_k(x_i)\psi_0(x_i)+B_1\sum_{i=0}^{i=n}\psi_k(x_i)\psi_1(x_i)+\ldots+$$

$$+B_k\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_k(x_i)\Big)^2+\ldots+B_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_k(x_i)\psi_{m+1}(x_i)=0\,;$$

а это по (3) § 63 приводится къ такому:

$$B_k\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\psi_k(x_i)\Big)^2=0\,;$$

но какъ множитель при B_k не $=0$, то само $B_k=0$ для $k\leqq m$; но тогда

(2) $$\phi(x)=B_{m+1}\psi_{m+1}(x)\,,$$

что и выражаетъ предложенiе.

? 66. 66. Условiя (3) ~~пред. §~~ и болѣе общiя (1) § 63 эквивалентны условiямъ (8) § 62, изъ которыхъ мы ихъ выше получили, ибо наоборотъ изъ (1) слѣдуетъ, беря для $f(x)$ полиномы степеней $0, 1, 2 \ldots m$ съ произвольными коэффицiентами, такой рядъ уравненiй:

(3) $$\left\{\begin{array}{ll} b_0\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i) & =0\,; \\ b_0'\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)+b_1'\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i & =0\,; \\ b_0''\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)+b_1''\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i+b_2''\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i^2 & =0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0^m\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)+b_1^m\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i+\ldots+b_m^m\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i^m & =0\,; \end{array}\right.$$

опредѣлитель изъ коэффицiентовъ которой при $m+1$ величинахъ:

(4) $$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)\,,\quad \sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i\,,\ \ldots\ \sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m+1}(x_i)x_i^m$$

будучи равенъ

$$b_0 b_1' b_2'' \dots b_m^m,$$

(такъ какъ элементы по одну сторону главной діагонали равны нулю), всегда отличенъ отъ нуля; откуда изъ (3) слѣдуетъ, что каждая изъ величинъ (4) равна нулю.

Примѣчаніе. Можно было бы взять $m+1$ независимыхъ другъ отъ друга полиномовъ одинаковой степени: тогда опредѣлитель изъ ихъ коэффиціентовъ не будетъ$=0$, и мы изъ того, что вторыя части этихъ уравненій суть нули, выведемъ тоже самое заключеніе.

Итакъ условія (8) § 62 и (3) § 63 эквивалентны, а отсюда слѣдуетъ, по доказанному въ пред. §, что и условія (8) § 62 вполнѣ опредѣляютъ функціи $\psi_{m+1}(x)$, какъ было сказано въ § 62.

67\. Предполагая $F(x)$ степени 0, затѣмъ 1, 2, и т. д., наконецъ m-ой и опредѣляя послѣдовательныя поправки изъ условій (8) и A_{m+1} по формулѣ (12) § 62, будемъ имѣть такое выраженіе для полинома $F(x)$, удовлетворяющаго условію, что сумма

$$V = \sum_{i=0}^{i=n} \Big(F(x_i) - u_i \Big)^2 \tag{1}$$

есть minimum:

$$F(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i \psi_0(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n} \Big(\psi_0(x_i)\Big)^2} \psi_0(x) + \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i \psi_1(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n} \Big(\psi_1(x_i)\Big)^2} \psi_1(x) + \dots + \frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i \psi_m(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n} \Big(\psi_m(x_i)\Big)^2} \psi_m(x), \tag{2}$$

гдѣ всѣ $\psi_k(x)$ опредѣляются изъ условій (8) § 62. Можно и прямо показать, что этотъ полиномъ даетъ minimum V. Дѣйствительно, полиномъ $F(x)$ степени m можно представить по § 64 такимъ образомъ:

$$F(x) = K_0 \psi_0(x) + K_1 \psi_1(x) + \dots + K_m \psi_m(x), \tag{3}$$

гдѣ неопредѣленные коэффиціенты постараемся опредѣлить такъ, чтобы V было minimum. Для этого полагаемъ:

отсюда получимъ такую непрерывную дробь для $\frac{f'(x)}{f(x)}$:

$$(5)\quad \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} = \cfrac{\alpha_1}{x-b_1-\cfrac{\alpha_2}{\alpha_1(x-b_2)-\cfrac{\alpha_3}{\alpha_2(x-b_3)-\cdots\,\cdot\,\cdot-\cfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x-b_n)-\cfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(x-b_{n+1})}}}}} \right.$$

Дѣля числителя и знаменателя каждой частной дроби, изъ которыхъ составлена эта непрерывная дробь, на коэффиціентъ при x въ ея знаменателѣ, мы получимъ, полагая:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1\,;\ \ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = a_2\,;\ \ \frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2} = a_3\,;\ \ \frac{\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3} = a_4\,,\ldots \\ \ldots \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_{k-1}\,\alpha_k} = a_{k+1} \ldots \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}\alpha_n} = a_{n+1}\,; \end{array} \right.$$

такую непрерывную дробь:

$$(7)\quad \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} = \cfrac{a_1}{x-b_1-\cfrac{a_2}{x-b_2-\cfrac{a_3}{x-b_3-\cdots\,\cdot\,\cdot-\cfrac{a_n}{x-b_n-\cfrac{a_{n+1}}{x-b_{n+1}}}}}} \right.$$

70. Составимъ теперь ея подходящія дроби:

$$(1)\quad \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)} = \frac{0}{1}\,;\quad \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{a_1}{x-b_1}\,;\quad \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} = \frac{a_1(x-b_2)}{(x-b_1)(x-b_2)-a_2}\,;$$

и т. д.

Мы будемъ имѣть такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\varphi_0(x)=0 & \psi_0(x)=1 \\
\varphi_1(x)=a_1 & \psi_1(x)=x-b_1 \\
\varphi_2(x)=\varphi_1(x)(x-b_2)-a_2\varphi_0(x) & \psi_2(x)=\psi_1(x)(x-b_2)-a_2\psi_0(x) \\
\text{и вообще} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_m(x)=\varphi_{m-1}(x)(x-b_m)-a_m\varphi_{m-2}(x) & \psi_m(x)=\psi_{m-1}(x)(x-b_m)-a_m\psi_{m-2}(x).
\end{array}\right\}(2)$$

Допустимъ справедливость закона, выражаемаго послѣдними формулами, для $m+1$-ой подходящей дроби и докажемъ, что онъ будетъ справедливъ и для слѣдующей подходящей дроби; тогда онъ будетъ справедливъ для всякой подходящей дроби. Чтобы получить слѣдующую подходящую дробь, вмѣсто того, чтобы остановиться на частномъ знаменателѣ $x-b_m$, мы должны остановиться на $x-b_{m+1}$; слѣдовательно вмѣсто $x-b_m$ за послѣднее частное взять

$$x-b_m-\frac{a_{m+1}}{x-b_{m+1}};$$

тогда мы будемъ имѣть слѣдующую подходящую дробь, именно:

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}=\frac{\varphi_{m-1}(x)\left[x-b_m-\dfrac{a_{m+1}}{x-b_{m+1}}\right]-a_m\varphi_{m-2}(x)}{\psi_{m-1}(x)\left[x-b_m-\dfrac{a_{m+1}}{x-b_{m+1}}\right]-a_m\psi_{m-2}(x)},$$

или

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}=\frac{[\varphi_{m-1}(x)(x-b_m)-a_m\varphi_{m-2}(x)](x-b_{m+1})-a_{m+1}\varphi_{m-1}(x)}{[\psi_{m-1}(x)(x-b_m)-a_m\psi_{m-2}(x)](x-b_{m+1})-a_{m+1}\psi_{m-1}(x)},$$

а это на основанiи послѣднихъ формулъ изъ (2) окончательно такъ представится:

$$\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}=\frac{\varphi_m(x)(x-b_{m+1})-a_{m+1}\varphi_{m-1}(x)}{\psi_m(x)(x-b_{m+1})-a_{m+1}\psi_{m-1}(x)},$$

откуда будемъ имѣть:

$$\varphi_{m+1}(x)=\varphi_m(x)(x-b_{m+1})-a_{m+1}\varphi_{m-1}(x); \qquad (3)$$

$$(4)\qquad \psi_{m+1}(x)=\psi_m(x)(x-b_{m+1})-a_{m+1}\psi_{m-1}(x);$$

формулы, которыя выводятся изъ послѣднихъ (2) чрезъ перемѣну m на $m+1$. Изъ этихъ формулъ и (2) видно, что степень полинома $\psi_p(x)$ указывается его значкомъ, т. е. равна p.

71. Помножая равенство (3) предыдущаго § на $\psi_m(x)$, а (4) на $\varphi_m(x)$, и вычитая послѣднiй результатъ изъ перваго, получимъ:

$$(1)\quad \varphi_{m+1}(x)\psi_m(x)-\psi_{m+1}(x)\varphi_m(x)=a_{m+1}\Big(\varphi_m(x)\psi_{m-1}(x)-\psi_m(x)\varphi_{m-1}(x)\Big);$$

давая здѣсь m убывающiй рядъ значенiй:

$$m-1,\ \ m-2,\ \ m-3,\ldots 3,2,1,$$

и перемножая полученные результаты, а также имѣя въ виду, что по (2) предыдущаго § будетъ

$$(2)\qquad \varphi_1(x)\psi_0(x)-\psi_1(x)\varphi_0(x)=a_1\,,$$

мы получимъ по сокращенiи обѣихъ частей на общихъ множителей слѣдующее равенство:

$$(3)\qquad \varphi_{m+1}(x)\psi_m(x)-\psi_{m+1}(x)\varphi_m(x)=a_1\,.\,a_2\,.\,a_3\ldots a_m\,.\,a_{m+1}\,.$$

Дѣля это на произведенiе

$$\psi_m(x)\,.\,\psi_{m+1}(x)\,,$$

мы получимъ:

$$(4)\qquad \frac{\varphi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}-\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}=\frac{a_1\,.\,a_2\,.\,a_3\ldots a_m\,.\,a_{m+1}}{\psi_m(x)\,.\,\psi_{m+1}(x)}\,.$$

Такъ какъ сама дробь:

$$(5)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{x-x_i}\,;$$

можетъ быть такъ представлена:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{x-x_i} = \frac{\varphi_m(x)\theta(x) - a_{m+1}\varphi_{m-1}(x)}{\psi_m(x)\theta(x) - a_{m+1}\psi_{m-1}(x)}, \tag{6}$$

гдѣ

$$\theta(x) = x - b_{m+1} - \cfrac{a_{m+2}}{x - b_{m+2} - \cdots - \cfrac{a_{n+1}}{x - b_{n+1}}}; \tag{7}$$

то, вычитая изъ нея $\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}$, получимъ по (3):

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{x-x_i} - \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)} = \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m a_{m+1}}{\psi_m(x)[\psi_m(x)\theta(x) - a_{m+1}\psi_{m-1}(x)]}. \tag{8}$$

Здѣсь $\theta(x)$ по обращеніи въ обыкновенную дробь будетъ имѣть числителемъ полиномъ степени $n+1-m$, тогда какъ знаменатель будетъ степени $n-m$, слѣдовательно на единицу нисшей.

72. Помножая эту разность на $\psi_m(x)$, мы получимъ функцію, которую по Чебышеву означимъ чрезъ $R_m(x)$:

$$R_m(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(x)}{x-x_i} - \varphi_m(x) = \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m a_{m+1}}{\psi_m(x)\theta(x) - a_{m+1}\psi_{m-1}(x)}. \tag{1}$$

Изъ перваго выраженія $R_m(x)$, опредѣляющаго эту функцію, можно вывести между тремя послѣдовательными функціями $R(x)$ соотношенія, подобныя (2) § 70; для этого стоитъ только внести сюда вмѣсто $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ ихъ выраженія изъ (2) § 70; тогда будемъ имѣть:

$$R_m(x) = \left\{\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_{m-1}(x)}{x-x_i} - \varphi_{m-1}(x)\right\}(x-b_m) - a_m\left\{\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_{m-2}(x)}{x-x_i} - \varphi_{m-2}(x)\right\},$$

т. е.

$$R_m(x) = R_{m-1}(x)(x-b_m) - a_m R_{m-2}(x). \tag{2}$$

Такимъ образомъ функціи $R_m(x)$ слѣдуютъ тому же закону, какъ числители и знаменатели подходящихъ дробей. Эта формула позволяетъ послѣдовательно находить всѣ $R_m(x)$, когда будемъ знать $R_0(x)$ и $R_1(x)$.

73. Чтобы найти эти функціи, мы должны подставить въ формулу (1) пред. § для $m=0$ и $m=1$ значенія $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$, взятыя изъ (2) § 70; будемъ имѣть:

(1) $$R_0(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{x-x_i};$$

(2) $$R_1(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x-b_1}{x-x_i}-a_1.$$

Послѣднее можно преобразовать такимъ образомъ:

$$\frac{x-b_1}{x-x_i}=1+\frac{x_i-b_1}{x-x_i}=1+\frac{\psi_1(x_i)}{x-x_i};$$

слѣдовательно, имѣя въ виду еще, что $a_1=a=n+1$, мы будемъ имѣть:

(3) $$R_1(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_1(x_i)}{x-x_i}.$$

Къ такому же виду можно привести и $R_m(x)$. Дѣйствительно:

(4) $$\frac{\psi_m(x)}{x-x_i}=\chi(x,x_i)+\frac{\psi_m(x_i)}{x-x_i},$$

означая чрезъ $\chi(x,x_i)$ частное отъ дѣленія $\psi_m(x)-\psi_m(x_i)$ на $x-x_i$, (которое выполняется безъ остатка, какъ извѣстно); внося это въ (1) § 72, будемъ имѣть:

(5) $$R_m(x)=\left(\sum_{i=0}^{i=n}\chi(x,x_i)-\varphi_m(x)\right)+\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_m(x_i)}{x-x_i};$$

но изъ второго выраженія $R_m(x)$ въ (1), видно что для $x=\infty$ будетъ

(6) $$R_m(\infty)=0^{m+1},$$

[такъ какъ $\psi_m(\infty)=\infty^m$, будучи полиномомъ степени m, а $\theta(\infty)=\infty^1$, какъ дробь, степень числителя которой на единицу болѣе степени знаменателя]; потому цѣлая часть въ (5) должна быть тождественно равна нулю, [ибо иначе было бы $R_m(\infty)=\infty$,] и слѣдовательно

(7) $$R_m(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_m(x_i)}{x-x_i}.$$

74. Разлагая функцію $R_m(x)$, выраженную такимъ образомъ, по нисходящимъ степенямъ x, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} R_m(x) &= \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(x_i)}{x}\left(1-\frac{x_i}{x}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i) + \frac{1}{x^2}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i + \frac{1}{x^3}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^2 + \ldots \\ \ldots &+ \frac{1}{x^m}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^{m-1} + \frac{1}{x^{m+1}}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^m + \frac{1}{x^{m+2}}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^{m+1} + \ldots; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

для того, чтобы неравенство (14) имѣло мѣсто, должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^k = 0\,. \\ [k=0\,,1\,,2\,,3\ldots(m-1)] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Итакъ знаменатели подходящихъ дробей удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ, необходимымъ и достаточнымъ, которыми мы опредѣлили въ § 62 функціи $\psi_m(x)$. Что же касается до коэффиціента при $\frac{1}{x^{m+1}}$, т. е. $\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^m$, то по (4) § 63 онъ никогда не $=0$. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что разложеніе $R_m(x)$ по нисходящимъ степенямъ x будетъ имѣть такой видъ:

$$R_m(x) = \frac{(m,m)}{x^{m+1}} + \frac{(m,m+1)}{x^{m+2}} + \frac{(m,m+2)}{x^{m+3}} + \ldots + \frac{(m,m+k)}{x^{m+k+1}} + \ldots \quad (3)$$

гдѣ для краткости положено:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^m = (m,m);\quad \sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^{m+1} = (m,m+1);\ldots \quad (4)$$

и вообще

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)x_i^{m+k} = (m,m+k)\,. \quad (5)$$

75. 75. Интерполированіе по формулѣ Чебышева [(2) § 67] было бы однако затруднительно, если бы для этого требовалось на самомъ дѣлѣ выполнять разложеніе дроби $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{x-x_i}$ въ непрерывную; но Ак. Чебышевъ показалъ, что этого вовсе не нужно, ибо существуютъ очень простыя возвратныя формулы, дѣлающія возможнымъ вычисленіе новыхъ, требуемыхъ лишнимъ членомъ полинома, величинъ при помощи прежде найденныхъ. Дѣйствительно, вставляя въ равенство (2) § 72 вмѣсто функцій $R_m(x)$, $R_{m-1}(x)$ и $R_{m-2}(x)$ ихъ разложенія въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x по формулѣ (3) пред. § и сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ равенства, мы будемъ имѣть такой рядъ равенствъ:

$$(1) \quad \begin{cases} 0=(m-1,m-1)-a_m(m-2,m-2) \\ 0=(m-1,m)-b_m(m-1,m-1)-a_m(m-2,m-1) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (m,m)=(m-1,m+1)-b_m(m-1,m)-a_m(m-2,m) \\ (m,m+1)=(m-1,m+2)-b_m(m-1,m+1)-a_m(m-2,m+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (m,m+k-1)=(m-1,m+k)-b_m(m-1,m+k-1)-a_m(m-2,m+k-1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Изъ (1) находимъ сперва

$$(3) \qquad a_m=\frac{(m-1\,,m-1)}{(m-2\,,m-2)},$$

потомъ изъ второго:

$$(4) \qquad b_m=-a_m\frac{(m-2\,,m-1)}{(m-1\,,m-1)}+\frac{(m-1\,,m)}{(m-1\,,m-1)},$$

и затѣмъ по (2) вычисляемъ коэффиціенты $(m\,,\,m)$, $(m,\ m+1)$ и т. д. разложенія $R_m(x)$ по нисходящимъ степенямъ x, которые, какъ видно изъ формулъ (3) и (4), потребуются для вычисленія a_{m+1} и b_{m+1}. Послѣ того, имѣя предыдущія $\psi_{m-2}(x)$ и $\psi_{m-1}(x)$, и a_m и b_m, мы вычислимъ $\psi_m(x)$ по формуламъ (2) § 70.

Что же касается до $(0, k)$ и $(1, k)$, то первые найдутся изъ (9), разлагая $\frac{1}{x-x_i}$ въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x:

$$R_0(x)=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}\left(1-\frac{x_i}{x}\right)^{-1}=\frac{n+1}{x}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i}{x^2}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i^2}{x^3}+\ldots+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i^k}{x^{k+1}}+\ldots; \tag{5}$$

слѣдовательно

$$(0,0)=n+1\,;\ (0,1)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i\,;\ (0,2)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i^2\,;\ldots(0,k)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i^k\,;\ldots \tag{6}$$

Что же касается до вторыхъ, то имѣя въ виду, что по (3) § 73 и по (3) § 74 для $m=1$:

$$R_1(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_1(x_i)}{x-x_i}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i-b_1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)\left(1-\frac{x_i}{x}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)+\frac{1}{x^2}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i+\frac{1}{x^3}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{x^{k+1}}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i^k+\ldots=$$

$$=\frac{(0,1)}{x^2}+\frac{(1,2)}{x^3}+\frac{(1,3)}{x^4}+\ldots+\frac{(1,k)}{x^{k+1}}+\ldots,$$

мы получаемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)=0\,, \tag{7}$$

откуда

$$b_1=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{i=n}x_i=\frac{(0,1)}{(0,0)}\,, \tag{8}$$

и, имѣя въ виду (6):

*

75. 75. Интерполированіе по формулѣ Чебышева [(2) § 67] было бы однако затруднительно, если бы для этого требовалось на самомъ дѣлѣ выполнять разложеніе дроби $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{x-x_i}$ въ непрерывную; но Ак. Чебышевъ показалъ, что этого вовсе не нужно, ибо существуютъ очень простыя возвратныя формулы, дѣлающія возможнымъ вычисленіе новыхъ, требуемыхъ лишнимъ членомъ полинома, величинъ при помощи прежде найденныхъ. Дѣйствительно, вставляя въ равенство (2) § 72 вмѣсто функцій $R_m(x)$, $R_{m-1}(x)$ и $R_{m-2}(x)$ ихъ разложенія въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x по формулѣ (3) пред. § и сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ равенства, мы будемъ имѣть такой рядъ равенствъ:

$$(1)\quad \begin{cases} 0=(m-1,m-1)-a_m(m-2,m-2) \\ 0=(m-1,m)-b_m(m-1,m-1)-a_m(m-2,m-1) \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} (m,m)=(m-1,m+1)-b_m(m-1,m)-a_m(m-2,m) \\ (m,m+1)=(m-1,m+2)-b_m(m-1,m+1)-a_m(m-2,m+1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (m,m+k-1)=(m-1,m+k)-b_m(m-1,m+k-1)-a_m(m-2,m+k-1) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Изъ (1) находимъ сперва

$$(3)\qquad a_m=\frac{(m-1\,,m-1)}{(m-2\,,m-2)},$$

потомъ изъ второго:

$$(4)\qquad b_m=-\,a_m\frac{(m-2\,,m-1)}{(m-1\,,m-1)}+\frac{(m-1\,,m)}{(m-1\,,m-1)},$$

и затѣмъ по (2) вычисляемъ коэффиціенты $(m\,,m)$, $(m,\ m+1)$ и т. д. разложенія $R_m(x)$ по нисходящимъ степенямъ x, которые, какъ видно изъ формулъ (3) и (4), потребуются для вычисленія a_{m+1} и b_{m+1}. Послѣ того, имѣя предыдущія $\psi_{m-2}(x)$ и $\psi_{m-1}(x)$, и a_m и b_m, мы вычислимъ $\psi_m(x)$ по формуламъ (2) § 70.

Что же касается до $(0, k)$ и $(1, k)$, то первые найдутся изъ (9), (1) § 74, разлагая $\frac{1}{x-x_i}$ въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x:

$$R_0(x)=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}\left(1-\frac{x_i}{x}\right)^{-1}=\frac{n+1}{x}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i}{x^2}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i^2}{x^3}+\ldots+\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}x_i^k}{x^{k+1}}+\ldots; \quad (5)$$

слѣдовательно

$$(0,0)=n+1;\ (0,1)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i;\ (0,2)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i^2;\ldots(0,k)=\sum_{i=0}^{i=n}x_i^k;\ldots \quad (6)$$

Что же касается до вторыхъ, то имѣя въ виду, что по (3) § 73 и по (3) § 74 для $m=1$:

$$R_1(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_1(x_i)}{x-x_i}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i-b_1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)\left(1-\frac{x_i}{x}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)+\frac{1}{x^2}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i+\frac{1}{x^3}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{x^{k+1}}\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)x_i^k+\ldots=$$

$$=\frac{(1,1)}{x^2}+\frac{(1,2)}{x^3}+\frac{(1,3)}{x^4}+\ldots+\frac{(1,k)}{x^{k+1}}+\ldots,$$

мы получаемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(x_i-b_1)=0, \quad (7)$$

откуда

$$b_1=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{i=n}x_i=\frac{(0,1)}{(0,0)}, \quad (8)$$

и, имѣя въ виду (6):

*

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&(1,1)=(0,1)-(n+1)b_1\,;\\
&(1,2)=(0,2)-(0,1)\,b_1\,;\\
&(1,3)=(0,3)-(0,2)\,b_1\,;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&(1,k)=(0,k)-(0,k-1)\,b_1\,;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

откуда найдемъ всѣ $(1\,,\,k)$. Тѣ же формулы можно получить, замѣчая, что

$$
R_1(x)=\psi_1(x)\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{x-x_i}-\varphi_1(x)=
$$

$$
=(x-b_1)R_0(x)-a_1,
$$

по (2) § 72 и (1) § 73, и вставляя сюда вмѣсто $R_1(x)$ и $R_0(x)$ ихъ разложенія въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x.



76. Равнымъ образомъ коэффиціенты K_k при функціяхъ $\psi_k(x)$ въ формулѣ (3) § 67 нѣтъ надобности вычислять по формулѣ (6) того же §: существуетъ и для нихъ возвратная формула, позволяющая вычислять ихъ по предыдущимъ. Въ самомъ дѣлѣ: функція $\psi_k(x)-x^k$ есть полиномъ степени $k-1$, а потому можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$
\psi_k(x)-x^k=A_0\psi_0(x)+A_1\psi_1(x)+\ldots+A_{k-1}\psi_{k-1}(x)\,,
$$

откуда

$$
(1)\qquad \psi_k(x)=x^k+A_0\psi_0(x)+A_1\psi_1(x)+\ldots+A_{k-1}\psi_{k-1}(x)\,;
$$

внося это въ уравненіе (4) § 67, мы будемъ имѣть на основаніи этихъ самыхъ уравненій:

$$
(2)\qquad \sum_{i=0}^{i=n}\Big(K_0\psi_0(x_i)+K_1\psi_1(x_i)+\ldots+K_k\psi_k(x_i)+\ldots+K_m\psi_m(x_i)-u_i\Big)x_i^k=0\,,
$$

а это на основаніи (8) § 62 и (4) и (5) § 74 по раскрытіи скобокъ приметъ такой видъ:

$$K_0(0,k)+K_1(1,k)+K_2(2,k)+\ldots+K_{k-1}(k-1,k)+K_k(k,k)-\sum_{i=0}^{i=n}u_ix_i^k=0\,, \quad (3)$$

откуда получимъ искомую формулу:

$$K_k=\frac{\sum_{i=0}^{i=n}u_ix_i^k-K_0(0,k)-K_1(1,k)-K_2(2,k)-\ldots-K_{k-1}(k-1,k)}{(k,k)}\,. \quad (4)$$

77. 77. Значенія V, т. е. суммы квадратовъ погрѣшностей, съ которыми найденный полиномъ представляетъ функцію, которой даны лишь частныя значенія [(1) § 67], также можно вычислять по таковымъ для полиномовъ предшествующихъ степеней.

Помножая (4) § 67 на K_k и суммируя по k отъ 0 до m, по (3) того же §, получимъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)F(x_i)=0\,; \quad (1)$$

на основаніи этого будетъ:

$$\left.\begin{aligned}V=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)^2=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)F(x_i)-\sum_{i=0}^{i=n}\Big(F(x_i)-u_i\Big)u_i=\\=\sum_{i=0}^{i=n}\Big(u_i^2-F(x_i)u_i\Big)\,;\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

а подставляя вмѣсто $F(x_i)$ его выраженіе изъ (3) § 67, получимъ:

$$V=\sum_{i=0}^{i=n}u_i^2-K_0\sum_{i=0}^{i=n}\varphi_0(x_i)u_i-K_1\sum_{i=0}^{i=n}\varphi_1(x_i)u_i-\ldots-K_m\sum_{i=0}^{i=n}\varphi_m(x_i)u_i\,; \quad (3)$$

но изъ (5) § 67 имѣемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n}\varphi_k(x_i)u_i=K_k\sum_{i=0}^{i=n}\Big(\varphi_k(x_i)\Big)^2\,, \quad (4)$$

а по (4) § 63 и (4) § 74

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \left(\psi_k(x_i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{i=n} \psi_k(x_i) x_i^k = (k,k) ;$$

на основанiи этого V такъ представится:

$$(6) \qquad V = \sum_{i=0}^{i=n} u_i^2 - K_0^2\,(0,0) - K_1^2\,(1,1) - K_2^2\,(2,2) - \ldots - K_m^2(m,m) .$$

Отсюда слѣдуетъ что, если значенiе V для полинома $m-1$-ой степени означимъ чрезъ d_{m-1}^2, такъ что слѣдовательно

$$(7) \qquad d_{m-1}^2 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i^2 - K_0^2\,(0,0) - K_1^2\,(0,1) - \ldots - K_{m-1}^2\,(m-1, m-1) ,$$

то значенiе его для полинома степени m, которое означимъ чрезъ d_m^2, будетъ связано съ d_{m-1}^2 такимъ равенствомъ:

$$(8) \qquad d_m^2 = d_{m-1}^2 - K_m^2\,(m,m) ;$$

съ помощiю этой формулы каждое d_m^2 очень просто вычисляется по предыдущему. Послѣ этого средняя вѣроятная ошибка, которую означимъ чрезъ E_m, найдется по формулѣ.

$$(9) \qquad E_m = \sqrt{\frac{d_m^2}{n+1}} .$$

78. На основанiи предыдущаго общiй ходъ интерполированiя по способу Ак. Чебышева будетъ такой: 1) Сперва находимъ:

$$(1) \qquad (0,0) = \sum_{i=0}^{i=n} x_i^0 = n+1 ;$$

затѣмъ по формулѣ (6) § 67 для $k=1$ находимъ

$$K_0 = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} u_i}{(0,0)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} u_i}{n+1}; \tag{2}$$

это слѣд. средняя ариѳметическая данныхъ значеній функціи. Отмѣчаемъ, что

$$\psi_0(x) = 1; \tag{3}$$

далѣе по (7) пред. § для $m = 1$ находимъ:

$$d_0^2 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i^2 - (0,0)K_0^2, \tag{4}$$

и отсюда по формулѣ (9) того же §:

$$E_0 = \sqrt{\frac{d_0^2}{n+1}}, \tag{5}$$

почему и будемъ судить достаточно-ли ограничиться однимъ членомъ $K_0\psi_0(x)$ разложенія функціи u_x по знаменателямъ подходящихъ дробей дроби

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{x - x_i}.$$

2) Если окажется, что этого нельзя сдѣлать, то вычисляемъ второй членъ разложенія, т. е. $K_1\psi_1(x)$, и все къ нему относящееся въ такомъ порядкѣ: сперва находимъ по формуламъ (6) § 75:

$$(0,1) = \sum_{i=0}^{i=n} x_i; \qquad (0,2) = \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2; \tag{1}$$

далѣе находимъ по (8) и (9) того же §:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 = (0,0): \\ & b_1 = \frac{(0,1)}{(0,0)}; \qquad (1,1) = (0,2) - b_1(0,1); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

далѣе по (4) § (76) для $k=1$:

(3) $$K_1=\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i x_i-(0,1)K_0}{(1,1)};$$

затѣмъ по (2) § 70:

(4) $$\psi_1(x)=x-b_1,$$

и по (8) § 77 для $m=1$:

(5) $$d_1^2=d_0^2-(1,1)K_1^2,$$

и наконецъ по (9) того же § для $m=1$:

(6) $$E_1=\sqrt{\frac{d_1^2}{n+1}}.$$

3) Если эта величина еще не достаточно мала, то приступаютъ къ вычисленію третьяго члена $K_2\psi_2(x)$ по слѣдующимъ формуламъ:

(1) $$\begin{cases} (0,3)=\sum\limits_{i=0}^{i=n} x_i^3; & (0,4)=\sum\limits_{i=0}^{i=n} x_i^4; \\ (1,2)=(0,3)-b_1(0,2); & (1,3)=(0,4)-b_1(0,3); \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} a_2=\frac{(1,1)}{(0,0)}; & \\ b_2=\frac{(1,2)}{(1,1)}-a_2\frac{(0,1)}{(1,1)}; & (2,2)=(1,3)-b_2(1,2)-a_2(0,2); \end{cases}$$

(3) $$K_2=\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i x_i^2-(0,2)K_0-(1,2)K_1}{(2,2)};$$

(4) $$\psi_2(x)=(x-b_2)\psi_1(x)-a_2\psi_0(x);$$

(5) $$d_2^2=d_1^2-(2,2)K_2^2,$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{d_2^2}{n+1}}. \qquad (6)$$

И такъ далѣе.

Членъ $K_m \psi_m(x)$ потребуетъ вычисленія такихъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(1,2m-2)=(0,2m-1)-b_1(0,2m-2);\\
&\qquad (1,2m-1)=(0,2m)-b_1(0,2m-1);\\
&(2,2m-3)=(1,2m-2)-b_2(1,2m-3)-a_2(0,2m-3);\\
&\qquad (2,2m-2)=(1,2m-1)-b_2(1,2m-2)-a_2(0,2m-2);\\
&(3,2m-4)=(2,2m-3)-b_3(2,2m-4)-a_3(1,2m-4);\\
&\qquad (3,2m-3)=(2,2m-2)-b_3(2,2m-3)-a_3(1,2m-3);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(m-1,m)=(m-2,m+1)-b_{m-1}(m-2,m)-a_{m-1}(m-3,m)\\
&\qquad (m-1,m+1)=(m-2,m+2)-b_{m-1}(m-2,m+1)-a_{m-1}(m-2,m+1);
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_m=\frac{(m-1,m-1)}{(m-2,m-2)};\\
&b_m=\frac{(m-1,m)}{(m-1,m-1)}-a_m\frac{(m-2,m-1)}{(m-1,m-1)};\\
&\qquad (m,m)=(m-1,m+1)-b_m(m-1,m)-a_m(m-2,m);
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$K_m=\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=n}u_i x_i^m-(0,m)K_1-(1,m)K_1-(2,m)K_2-\ldots-(m-1,m)K_{m-1}}{(m,m)}; \qquad (3)$$

$$\psi_m(x)=(x-b_m)\psi_{m-1}(x)-a_m\psi_{m-2}(x); \qquad (4)$$

$$d_m^2=d_{m-1}^2-(m,m)K_m^2; \qquad (5)$$

$$E_m=\sqrt{\frac{d_m^2}{n+1}}. \qquad (6)$$

79. Изложенный способъ параболическаго интерполированія примѣняется, какъ общій, и къ тому частному случаю, когда данныя значе-

нія независимой перемѣнной образуютъ ариѳметическую прогрессію, когда слѣд., требуется проинтерполировать рядъ равноотстоящихъ величинъ; но для этого частнаго случая равноотстоящихъ величинъ Ак. Чебышевъ, вывелъ другую формулу, исходя изъ тѣхъ же характерныхъ для функцій $\psi_m(x)$ уравненій:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_k(x_i)\psi_m(x_i) = 0, \qquad \left(k \lesseqgtr m\right)$$

при помощи формулъ теоріи конечныхъ разностей; при этомъ онъ замѣтилъ, что функціи $\psi_m(x)$ для этого случая аналогичны извѣстнымъ функціямъ Лежандра. Такъ какъ съ выводомъ этой формулы лучше всего можно познакомиться изъ мемуаровъ самого Чебышева *), то мы ограничимся лишь сообщеніемъ окончательныхъ результатовъ (стр. 14 и 22 мемуара „Объ интерполированіи“ см. выноску); вотъ они:

$$(1) \qquad u_x = \frac{\sum\limits_0^n u_i}{n} + \frac{3\sum\limits_0^n (i+1)(n-i-1)\triangle u_i}{1^2 \,.\, n(n^2-1^2)} \triangle x(x-n) +$$

$$+ \frac{5\sum\limits_0^n (i+1)(i+2)(n-i-1)(n-i-2)\triangle^2 u_i}{1^2 \,.\, 2^2 n(n^2-1^2)(n^2-2^2)} \triangle^2 x(x-1)(x-n)(x-n-1) +$$

$$\frac{7\sum\limits_0^n (i+1)(i+2)(i+3)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)\triangle^3 u_i}{1^2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)} \triangle^3 \begin{bmatrix} x(x-1)(x-2) \,. \\ (x-n)(x-n-1)(x-n-2) \end{bmatrix} +$$

. . . .

$$\frac{(2\lambda+1)\sum\limits_0^n (i+1)\ldots(i+\lambda)(n-i-1)\ldots(n-i-\lambda)\triangle^\lambda u_i}{1^2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \ldots \lambda^2 \,.\, n(n^2-1^2)\ldots(n^2-\lambda^2)} \triangle^\lambda \begin{bmatrix} x(x-1)\ldots(x-\lambda+1) \,. \\ (x-n)(x-n-1)\ldots(x-n-\lambda+1) \end{bmatrix} +$$

. . . .

*) 1) Объ интерполированіи. Ак. Чебышева. Спб. 1864 г. Приложеніе къ IV тому „записокъ Имп. Академіи Наукъ“.

2) Объ интерполированіи величинъ равноотстоящихъ. П. Чебышева. Спб. 1875 г. Приложеніе къ XXV тому „записокъ Имп. Академіи Наукъ“.

$$d_\lambda^2 = d_{\lambda-1}^2 - \frac{(2\lambda+1)\left(\sum_0^n (i+1)(i+2)\ldots(i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2)\ldots(n-i-\lambda)\triangle^\lambda u_i\right)^2}{1^2 \,.\, 2^2 \ldots \lambda^2 \,.\, n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-\lambda^2)} \,. \quad (2)$$

Здѣсь суммированія относятся къ i. Вмѣсто $\sum d_\lambda^2$ у Чебышева, мы пишемъ для краткости, какъ и выше, d_λ^2 для обозначенія суммы квадратовъ погрѣшностей для полинома степени λ.

Въ указанныхъ мемуарахъ Чебышева читатели найдутъ раздѣланные примѣры.

А. А. Марковъ
Исчисленіе вероятностей
ст. 427 издан.

ГЛАВА IV.

Разности функцій многихъ перемѣнныхъ.

80. 80. Нѣкоторые изъ полученныхъ въ предыдущихъ главахъ результатовъ распространяются и на функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Разсмотримъ прежде самыя обозначенія функцій и ихъ разностей, принятыя въ теоріи конечныхъ разностей. Функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ мы будемъ обозначать чрезъ

$$u_{x,y}\,, \tag{1}$$

соблюдая постоянно разъ принятый порядокъ указателей; слѣд. $u_{y,x}$ будемъ обозначать уже не ту функцію, какъ (1), но ту, которая получается изъ нея чрезъ перемѣну x на y и на оборотъ.

Такъ если

$$u_{x,y} = x^2 y + \sin\frac{x}{y}\,,$$

то

$$u_{y,x} = y^2 x + \sin\frac{y}{x}\cdot$$

Функцію трехъ перемѣнныхъ, будемъ такъ обозначать:

$$u_{x,y,z}\,, \tag{2}$$

и т. д. Слѣд.

$$u_{5,-1}\,,$$

будетъ результатъ вставки 5 вмѣсто x, и -1 вмѣсто y въ (1);

$$u_{0,2,-3},$$

будетъ обозначать результатъ вставки 0 вмѣсто x, 2 вмѣсто y, и -3 вмѣсто z въ функцію (2).

81. Въ функціи двухъ и болѣе независимыхъ перемѣнныхъ можно давать конечныя приращенія одной какой либо перемѣнной, двумъ, тремъ... наконецъ всѣмъ; сообразно съ этимъ функція многихъ независимыхъ перемѣнныхъ будетъ имѣть нѣсколько разностей для одного и того же порядка.

Если приращеніе получаетъ *только* одна перемѣнная x, то мы будемъ имѣть *частную разность по* x, которую обозначаютъ, приписывая къ $\triangle$ значекъ x; такимъ образомъ

$$\triangle_x u_{x,y}, \tag{3}$$

означаетъ частную разность по x отъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ $u_{x,y}$; слѣд.

$$\triangle_x u_{x,y} = u_{x+h,y} - u_{x,y}. \tag{4}$$

Точно также обозначая по прежнему чрезъ h приращеніе независимой перемѣнной x,

$$\triangle_x u_{x,y,z},$$

будетъ обозначать частную разность по x отъ функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $u_{x,y,z}$:

$$\triangle_x u_{x,y,z} = u_{x+h,y,z} - u_{x,y,z}. \tag{5}$$

Такимъ же образомъ будетъ

$$\triangle_y u_{x,y} = u_{x,y+k} - u_{x,y} \tag{6}$$

частная разность по y отъ $u_{x,y}$, если чрезъ k означимъ приращеніе независимой перемѣнной y; и т. д.

Очевидно, что функція p независимыхъ перемѣнныхъ будемъ имѣть p частныхъ разностей перваго порядка.

ГЛАВА IV.

Разности функцій многихъ перемѣнныхъ.

80. Нѣкоторые изъ полученныхъ въ предыдущихъ главахъ результатовъ распространяются и на функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Разсмотримъ прежде самыя обозначенія функцій и ихъ разностей, принятыя въ теоріи конечныхъ разностей. Функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ мы будемъ обозначать чрезъ

(1) $$u_{x,y}\,,$$

соблюдая постоянно разъ принятый порядокъ указателей; слѣд. $u_{y,x}$ будемъ обозначать уже не ту функцію, какъ (1), но ту, которая получается изъ нея чрезъ перемѣну x на y и на оборотъ.

Такъ если

$$u_{x,y}=x^2y+\sin\frac{x}{y}\,,$$

то

$$u_{y,x}=y^2x+\sin\frac{y}{x}\cdot$$

Функцію трехъ перемѣнныхъ, будемъ такъ обозначать:

(2) $$u_{x,y,z}\,,$$

и т. д. Слѣд.

$$u_{5,-1}\,,$$

будетъ результатъ вставки 5 вмѣсто x, и -1 вмѣсто y въ (1);

$$u_{0,2,-3},$$

будетъ обозначать результатъ вставки 0 вмѣсто x, 2 вмѣсто y, и -3 вмѣсто z въ функцію (2).

81. Въ функціи двухъ и болѣе независимыхъ перемѣнныхъ можно давать конечныя приращенія одной какой либо перемѣнной, двумъ, тремъ... наконецъ всѣмъ; сообразно съ этимъ функція многихъ независимыхъ перемѣнныхъ будетъ имѣть нѣсколько разностей для одного и того же порядка.

Если приращеніе получаетъ *только* одна перемѣнная x, то мы будемъ имѣть *частную разность по* x, которую обозначаютъ, приписывая къ $\triangle$ значекъ x; такимъ образомъ

$$\triangle_x u_{x,y}, \tag{3}$$

означаетъ частную разность по x отъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ $u_{x,y}$; слѣд.

$$\triangle_x u_{x,y} = u_{x+h,y} - u_{x,y}. \tag{4}$$

Точно также обозначая по прежнему чрезъ h приращеніе независимой перемѣнной x,

$$\triangle_x u_{x,y,z},$$

будетъ обозначать частную разность по x отъ функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $u_{x,y,z}$:

$$\triangle_x u_{x,y,z} = u_{x+h,y,z} - u_{x,y,z}. \tag{5}$$

Такимъ же образомъ будетъ

$$\triangle_y u_{x,y} = u_{x,y+k} - u_{x,y} \tag{6}$$

частная разность по y отъ $u_{x,y}$, если чрезъ k означимъ приращеніе независимой перемѣнной y; и т. д.

Очевидно, что функція p независимыхъ перемѣнныхъ будемъ имѣть p частныхъ разностей перваго порядка.

82. Каждая разность можетъ имѣть свои разности по каждой перемѣнной; такъ

$$(1) \qquad \Delta_x^2 u_{x,y} = \Delta_x u_{x+h,y} - \Delta_x u_{x,y}\,,$$

будетъ вторая разность по x;

$$\Delta_y \Delta_x u_{x,y} = \Delta_x u_{x,y+k} - \Delta_x u_{x,y}\,;$$

будетъ вторая разность отъ $u_{x,y}$ сперва по x, потомъ по y; точно также

$$\Delta_x \Delta_y u_{xy} = \Delta_y u_{x+k,y} - \Delta_{x,y}$$

будетъ обозначать разность взятую сперва по y, потомъ по x. Легко видѣть, что обѣ послѣднія разности равны.

Дѣйствительно

$$\Delta_y \Delta_x u_{x,y} = \Delta_x u_{x,y+k} - \Delta u_{x,} =$$
$$= u_{x+h,y+k} - u_{x,y+k} - u_{x+h,y} + u_{x,}$$

а

$$\Delta_x \Delta_y u_{x,y} = u_{x+h,y+k} - u_{x+h,y} - u_{x,y+k} + u_{x,}$$

что отличается отъ предыдущаго только порядкомъ среднихъ членовъ; итакъ

$$(2) \qquad \Delta_y \Delta_x u_{x,y} = \Delta_x \Delta_y u_{x,y}\,.$$

Эту разность принято обозначать короче такъ:

$$(3) \qquad \Delta_{x,y}^{1+1} u_{x,y} = \Delta_y \Delta_x u_{x,y} = \Delta_x \Delta_y u_{x,y}\,.$$

Предложеніе (2) распространяется легко на функціи бо́льшаго числа перемѣнныхъ и высшія порядки самыхъ разностей. На основаніи этого для частыхъ разностей высшихъ порядковъ введено такое обозначеніе, что пишутъ при Δ указателями перемѣнныя въ томъ порядкѣ, который принятъ для самой функціи, и показателемъ сумму чиселъ, показывающихъ сколько разъ берется частная разность по каждой изъ этихъ перемѣнныхъ, соблюдая для слагаемыхъ тотъ-же порядокъ, т. е. первое слагаемое будетъ относиться къ первой перемѣнной, второе ко второй, и т. д. Такъ

$$\Delta_{x,y,z}^{m+k+p} u_{x,y,z}$$

будетъ обозначать частную разность отъ $u_{x,y,z}$ взятую m разъ по x, n по y, p по z, въ какомъ бы то ни было порядкѣ.

83. Чтобы получить полное приращеніе функціи, отвѣчающее случаю, когда всѣ перемѣнныя получаютъ свои приращенія, можно сперва дать приращеніе первой перемѣнной, затѣмъ второй, потомъ третьей и т. д. и наконецъ послѣдней. Такъ для трехъ перемѣнныхъ, измѣняя сперва x на h, получимъ:

$$u_{x,y,z} + \Delta_x u_{x,y,z};$$

измѣняя здѣсь y, получимъ:

$$u_{x,y,z} + \Delta_y u_{x,y,z} + \Delta_x u_{x,y,z} + \Delta_y \Delta_x u_{x,y,z};$$

измѣняя z, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} u_{x,y,z} + \Delta_z u_{x,y,z} + \Delta_y u_{x,y,z} + \Delta_z \Delta_y u_{x,y,z} + \\ + \Delta_x u_{x,y,z} + \Delta_z \Delta_x u_{x,y,z} + \Delta_y \Delta_x u_{x,y,z} + \Delta_z \Delta_y \Delta_x u_{x,y,z}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

слѣд. полное приращеніе $u_{x,y,z}$ которое обозначаютъ чрезъ Δ безъ значковъ, будетъ, употребляя сокращенныя обозначенія разностей высшихъ порядковъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_{x,y,z} = \Delta_x u_{x,y,z} + \Delta_y u_{x,y,z} + \Delta_z u_{x,y,z} + \\ + \Delta^{1+1}_{y,z} u_{x,y,z} + \Delta^{1+1}_{z,x} u_{x,y,z} + \Delta^{1+1}_{x,y} u_{x,y,z} + \Delta^{1+1+1}_{x,y,z} u_{x,y,z}; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

какъ видимъ полная разность перваго порядка будетъ содержать частныя разности высшихъ порядковъ.

Отдѣляя въ (1) операціонные символы взятія частной разности по x, по y, по z отъ функціональнаго символа $u_{x,y,z}$ и разсматривая ихъ какъ количественные, мы можемъ результатъ (1) представить символически такъ:

$$(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) u_{x,y,z}; \qquad (3)$$

слѣд. полное приращеніе $u_{x,y,z}$ символически такъ выразится:

$$\Delta u_{x,y,z} = \Big[(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) - 1\Big] u_{x,y,z}. \qquad (4)$$

Эта формула показываетъ, что для полученія полной разности перваго порядка отъ функціи $u_{x,y,z}$ ее надобно символически умножить на

$$(5) \qquad \Delta = \Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big].$$

Беря полную разность отъ (3), будемъ имѣть по сдѣланному замѣчанію:

$$\Delta^2 u_{x,y,z} = \Delta\left\{\Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big]u_{x,y,z}\right\} =$$

$$= \Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big].\Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big]u_{x,y,z}\,;$$

т. е.

$$(6) \qquad \Delta^2 u_{x,y,z} = \Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big]^2 u_{x,y,z}\,.$$

Вообще будемъ имѣть для полной разности n-го порядка такую формулу:

$$(7) \qquad \Delta^n u_{x,y,z} = \Big[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1\Big]^n u_{x,y,z}\,;$$

справедливость, которой докажется по способу заключенія отъ n къ $n+1$. Очевидно она вѣрна для всякаго числа независимыхъ перемѣнныхъ. Какъ видимъ изъ этой формулы, въ выраженіе полной разности какого либо порядка войдутъ не только частныя разности этого порядка, но также и высшихъ; для 3 перемѣнныхъ до порядка $3n$; для m независимыхъ перемѣнныхъ до порядка mn; но только не всѣ; однако на этомъ замѣчаніи мы не будемъ долѣе останавливаться.

84. Полная разность n-го порядка можетъ быть выражена чрезъ послѣдовательный рядъ значеній функціи $u_{x,y,z}$:

$$(1) \qquad u_{x,y,z}\,;\; u_{x+h,y+k,z+l}\,;\; u_{x+2h,y+2k,z+2l}\,;\ldots u_{x+nh,y+nk,z+nl}\,;$$

такою же формулою, какъ и для функцій одной независимой перемѣнной. Дѣйствительно:

$$\Delta u_{x,y,z} = u_{x+h,y+k,z+l} - u_{x,y,z}\,;$$

перемѣняя здѣсь x на $x+h$, y на $y+k$, z на $z+l$, и вычитая изъ имѣющаго получиться результата, мы будемъ имѣть:

$$\Delta^2 u_{x,y,z} = u_{x+2h,y+2k,z+2l} - 2u_{x+h,y+k,z+l} + u_{x,y,z}; \qquad (3)$$

отсюда, обобщивъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^n u_{x,y,z} = u_{x+nh,y+nk,z+nl} - C_1^n u_{x+\overline{n-1}h,y+\overline{n-1}k,z+\overline{n-1}l} + \\ + C_2^n u_{x+\overline{n-2}h,y+\overline{n-2}k,z+\overline{n-2}l} - \ldots + \\ + (-1)^m C_m^n u_{x+\overline{n-m}h,y+\overline{n-m}k,z+\overline{n-m}l} - \ldots + (-1)^n u_{x,y,z}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

85. Равнымъ образомъ легко выразить $u_{x+nh,y+nk,z+nl}$ чрезъ $u_{x,y,z}$ и полныя ея разности до порядка n включительно. Дѣйствительно, изъ (2) пред. § имѣемъ:

$$u_{x+h,y+k,z+l} = u_{x,y,z} + \Delta u_{x,y,z}; \qquad (1)$$

беря полную разность m-го порядка, будемъ имѣть:

$$\Delta^m u_{x+h,y+k,z+l} = \Delta^m u_{x,y,z} + \Delta^{m+1} u_{x,y,z}; \qquad (2)$$

теперь перемѣняя въ (1) x на $x+h$, y на $y+k$, z на $z+l$ и преобразуя первый членъ второй части результата по (1), второй по (2) для $m=1$, мы будемъ имѣть:

$$u_{x+2h,y+2k,z+2l} = u_{x,y,z} + 2\Delta u_{x,y,z} + \Delta^2 u_{x,y,z}. \qquad (3)$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, y на $y+k$, z на $z+l$ и преобразуя первый членъ результата по (1), второй и третій по (2) для $m=1, 2$, мы получимъ:

$$u_{x+3h,y+3k,z+3l} = u_{x,y,z} + 3\Delta u_{x,y,z} + 3\Delta^2 u_{x,y,z} + \Delta^3 u_{x,y,z}. \qquad (4)$$

Обобщая, получимъ такую формулу:

$$u_{x+nh,y+nk,z+nl} = u_{x,y,z} + C_1^n \Delta u_{x,y,z} + C_2^n \Delta^2 u_{x,y,z} + \ldots + C_m^n \Delta^m u_{x,y,z} + \ldots + \Delta^n u_{x,y,z}, \qquad (5)$$

которая, какъ и формула (4) предыдущаго §, докажется по способу заключенія отъ n къ $n+1$.

86. Переходимъ теперь къ соотношеніямъ между разностями и производными функціями многихъ перемѣнныхъ, ограничиваясь разлагаемыми въ безконечный рядъ по строкѣ Тэйлора. Что касается полныхъ разностей, то по строкѣ Тэйлора имѣемъ:

$$(1)\begin{cases} u_{x+h,y+k,z+l} = u_{x,y,z} + \frac{1}{1}\left\{\frac{\partial u_{x,y,z}}{\partial x} h + \frac{\partial u_{x,y,z}}{\partial y} k + \frac{\partial u_{x,y,z}}{\partial z} l\right\} + \\ + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial y^2} k^2 + \frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial z^2} l^2 + 2\frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial y \partial z} kl + 2\frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial z \partial x} lh + 2\frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial x \partial y} hk\right\} + \ldots \end{cases}$$

или символически:

$$(2) \qquad u_{x+h,y+k,z+l} = e^{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}} u_{x,y,z};$$

отсюда, вычитая $u_{x,y,z}$, будемъ имѣть:

$$(3) \qquad \Delta u_{x,y,z} = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}} - 1\right) u_{x,y,z};$$

слѣд.

$$(4) \qquad \Delta = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}} - 1\right);$$

потому обобщая, будемъ имѣть формулу:

$$(5) \qquad \Delta^n u_{x,y,z} = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}} - 1\right)^n u_{x,y,z},$$

справедливость которой для всякаго n докажется по способу заключенія отъ n къ $n+1$. Строгій выводъ былъ бы совершенно аналогиченъ таковому для функцій одной независимой перемѣнной; предоставляемъ его сдѣлать читателю самому.

87. Что касается до частныхъ разностей высшаго порядка, то по формуламъ для функцій одной независимой перемѣнной будемъ имѣть:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_x^m u_{x,y,z} = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^m u_{x,y,z}; \\ \Delta_y^n u_{x,y,z} = \left(e^{k\frac{\partial}{\partial y}} - 1\right)^n u_{x,y,z}; \\ \Delta_z^p u_{x,y,z} = \left(e^{l\frac{\partial}{\partial z}} - 1\right)^p u_{x,y,z}; \end{cases}$$

отсюда получимъ, такъ какъ

$$\triangle_{x,y,z}^{m+n+p} u_{x,y,z} = \triangle_x^m \cdot \triangle_y^n \cdot \triangle_z^p u_{x,y,z}, \tag{2}$$

такой результатъ:

$$\triangle_{x,y,z}^{m+n+p} u_{x,y,z} = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^m \left(e^{k\frac{\partial}{\partial y}} - 1\right)^n \left(e^{l\frac{\partial}{\partial z}} - 1\right)^p u_{x,y,z}. \tag{3}$$

Строгій выводъ состоялъ бы опять въ томъ, что мы надъ обѣими частями формулы, получаемой по раскрытіи послѣдней изъ (1), произвели бы n разъ операцію $\triangle_y$, надъ полученнымъ результатомъ m разъ операцію $\triangle_x$; затѣмъ, опредѣливъ такимъ образомъ общій видъ выраженія разсматриваемой разности чрезъ производныя, опредѣлили бы коэффиціенты при этихъ производныхъ, которые независятъ отъ частнаго вида функцій, примѣняя формулу къ функціи

$$u_{k,y,z} = e^{ax+by+cz}, \tag{4}$$

для которой

$$\triangle_{x,y,z}^{m+n+p} u_{x,y,z} = e^{ax+by+cz}\left(e^{ah} - 1\right)^m \left(e^{bk} - 1\right)^n \left(e^{cl} - 1\right)^p; \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} u_{x,y,z}}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu} = e^{ax+by+cz} a^\lambda b^\mu c^\nu; \tag{6}$$

раздѣляя обѣ части имѣющаго получиться тогда равенства на $e^{ax+by+cz}$, увидѣли бы что искомые коэффиціенты при производныхъ суть не что иное, какъ коэффиціенты при $a^\lambda\ b^\mu\ c^\nu$ въ разложеніи по степенямъ a, b, c функціи

$$\left(e^{ah} - 1\right)^m \left(e^{bk} - 1\right)^n \left(e^{cl} - 1\right)^p;$$

перемѣняя въ полученномъ такимъ образомъ равенствѣ, въ которомъ налѣво будетъ стоять эта функція, а направо ея разложеніе въ рядъ, величины a, b, c соотвѣтственно на операціонныя символы $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, помножая на $u_{x,y,z}$ и затѣмъ принимая

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\nu} u_{x,y,z}=\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}u_{x,y,z}}{\partial x^{\lambda}\partial y^{\mu}\partial z^{\nu}},$$

мы получили бы направо искомое выраженіе разности

$$\triangle_{x,y,z}^{m+n+p}u_{x,y,z}$$

чрезъ производныя; налѣво же вторую часть (3), каковая формула и была бы такимъ образомъ строго доказана.

88. Для функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ легко получить интерполяціонную формулу, отвѣчающую Ньютоновой для функцій одной независимой перемѣнной. Напишемъ въ формулѣ (4) § 47 $u_{X,y}$ вмѣсто u_X и $u_{x,y}$ вмѣсто u_x; будемъ имѣть *)

$$(1)\left\{\begin{aligned} u_{X,y}=u_{x,y}&+\frac{X-x}{1}\frac{\triangle_x u_{x,y}}{h}+\frac{(X-x)(X-x-h)}{1.2}\cdot\frac{\triangle_x^2 u_{x,y}}{h^2}+\ldots\\ &\ldots+\frac{(X-x)(X-x-h)\ldots(X-x-\overline{m-1}h)}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{\triangle_x^m u_{x,y}}{h^m}+\ldots\\ &\ldots+\frac{(X-x)(X-x-h)\ldots(X-x-\overline{n-1}h)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\triangle_x^n u_{x,y}}{h^n}.\end{aligned}\right.$$

Теперь, если $Y=y+pk$, то по той же формулѣ будемъ имѣть:

$$(2)\left\{\begin{aligned} u_{x,Y}=u_{x,y}&+\frac{Y-y}{1}\cdot\frac{\triangle_y u_{x,y}}{k}+\frac{(Y-y)(Y-y-k)}{1.2}\frac{\triangle_y^2 u_{x,y}}{k^2}+\ldots\\ &\ldots+\frac{(Y-y)(Y-y-k)\ldots(Y-y-\overline{m'-1}k)}{1.2.3\ldots m'}\cdot\frac{\triangle_y^{m'} u_{x,y}}{k^{m'}}+\ldots\\ &\ldots+\frac{(Y-y)(Y-y-k)\ldots(Y-y-\overline{p-1}k)}{1.2.3\ldots p}\frac{\triangle_y^p u_{x,y}}{k^p};\end{aligned}\right.$$

беря отъ этого первую, вторую, третью и т. д. разности по x, и вставляя въ (1), получимъ:

---

*) Къ $\triangle$ приписываемъ значекъ x, такъ какъ теперь u зависитъ отъ двухъ перемѣнныхъ.

$$u_{X,Y} = u_{x,y} +$$

$$+ \frac{X-x}{1} \frac{\Delta_x u_{x,y}}{h} + \frac{(X-x)(X-x-h)}{1.2} \Delta_x^2 u_{x,y} + \frac{(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)}{1.2.3} \Delta_x^3 u_{x,y} +$$

$$+ \frac{Y-y}{1} \frac{\Delta_y u_{x,y}}{h} + \frac{(X-x)(Y-y)}{1.1} \Delta_{x,y}^{1+1} u_{x,y} + \frac{(X-x)(X-x-h)(Y-y)}{1.2.1} \Delta_{x,y}^{2+1} u_{x,y} +$$

$$+ \frac{(X-x)(Y-y-k)}{1.2} \Delta_y^2 u_{x,y} + \frac{(X-x)(Y-y)(Y-y-k)}{1.1.2} \Delta_{x,y}^{1+2} u_{x,y} +$$

$$+ \frac{(Y-y)(Y-y-k)(Y-y-2k)}{1.2.3} \Delta_y^3 u_{x,y} +$$

$+$ и т. д.

Члены до конца будутъ представлять группы, подобныя группамъ перваго, втораго, третьяго, четвертаго столбцевъ только для случая $p = n$; вообще послѣднія группы членовъ будутъ въ общемъ случаѣ p не$=n$ уклоняться отъ первыхъ; но мы ихъ не будемъ изслѣдовать: наша цѣль была только показать, какъ можно въ каждомъ случаѣ получить интерполяціонную формулу.—По этому способу очевидно можно получить интерполяціонную формулу въ каждомъ частномъ случаѣ и для функціи какого угодно числа независимыхъ перемѣнныхъ, только эти формулы будутъ слишкомъ сложны, чтобы найти себѣ мѣсто здѣсь.

ГЛАВА V.

Обратное исчисленіе конечныхъ разностей. Суммированіе.

89. Задача обратнаго исчисленія конечныхъ разностей состоитъ въ опредѣленіи такой функціи, которой данная была бы разностью даннаго порядка; общнѣе—эта задача состоитъ въ опредѣленіи функціи по данному, выраженному аналитически, соотношенію между независимою перемѣнною, ея искомою функціей и конечными разностями послѣдней до извѣстнаго порядка, и для функцій многихъ перемѣнныхъ—въ опредѣленіи функціи по соотношенію между независимыми перемѣнными, ихъ искомою функціей и частными конечными разностями послѣдней до извѣстнаго порядка по всѣмъ или только нѣкоторымъ перемѣннымъ. Первую задачу можно разсматривать какъ частный случай послѣдней; однако этотъ частный случай есть самый простой и къ нему стараются, когда это возможно, привести и общій случай; а потому мы съ него и начнемъ эту вторую часть курса. Обратное исчисленіе конечныхъ разностей отвѣчаетъ, какъ видимъ, интегральному исчисленію, [тогда какъ прямое—дифференціальному], и притомъ первая часть его той части интегральнаго, которая называется интегрированіемъ функцій или квадратурою; вторая же часть — интегрированію уравненій. Первая называется обыкновенно *суммированіемъ*, по причинѣ, которую сейчасъ увидимъ, вторая *интегрированіемъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ*, или же *рѣшеніемъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ* обыкновенныхъ или частныхъ, смотря потому ищется ли функція одной или многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

90. Задача: найти функцію по данной разности ея, есть задача неопредѣленная. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\Delta F(x) = f(x)\,, \tag{1}$$

то не только $F(x)$, но и $F(x)+C$, гдѣ C вообще періодическая функція x съ періодомъ h, будетъ удовлетворять условію (1). Дѣйствительно

$$\triangle\Big(F(x)+C\Big)=F(x+h)+C-F(x)-C,$$

ибо C не измѣняется при перемѣнѣ x на $x+h$, а отсюда по сокращеніи:

$$\triangle\Big(F(x)+C\Big)=\triangle F(x)=f(x);$$

т. е. функція $F(x)+C$, также какъ и $F(x)$, имѣетъ $f(x)$ своею разностью 1-го порядка. (См. § 9).

91. Для того, чтобы показать, что $F(x)$, или, общнѣе, $F(x)+C$ есть та функція, которой $f(x)$ есть разность, употребляютъ знакъ $\sum$ такимъ образомъ:

$$F(x)+C=\sum f(x), \tag{1}$$

и читаютъ: сумма $f(x)$. Это вотъ на какомъ основаніи. Означая чрезъ $\Phi(x)$ самую общую функцію, имѣющую $f(x)$ своею разностью, мы имѣемъ по самому опредѣленію этой функціи:

$$\triangle\Phi(x)=f(x); \tag{2}$$

но по опредѣленію разности:

$$\triangle\Phi(x)=\Phi(x+h)-\Phi(x); \tag{3}$$

слѣд.

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=f(x); \tag{4}$$

полагая здѣсь $x=a$, $a+h$, $a+2h$, ... до $x=a+\overline{n-1}h$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(a+h)-\Phi(a)=f(a),\\ \Phi(a+2h)-\Phi(a+h)=f(a+h),\\ \Phi(a+3h)-\Phi(a+2h)=f(a+2h),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi(a+nh)-\Phi(a+\overline{n-1}h)=f(a+\overline{n-1}h);\end{array}\right\} \tag{5}$$

складывая эти равенства, по сокращеніи получимъ:

$$(6) \qquad \Phi(a+nh)-\Phi(a)=\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+kh),$$

или, полагая $a+kh=\xi$, $a+nh=x$, слѣдующее:

$$(7) \qquad \Phi(x)-\Phi(a)=\sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi),$$

гдѣ верхнимъ предѣломъ мы написали x, а не $x-h$, какъ то слѣдовало-бы по формулѣ (6),—согласно установившемуся обычаю въ обратномъ исчисленіи конечныхъ разностей писать верхнимъ предѣломъ слѣдующее за послѣднимъ значеніемъ независимой перемѣнной въ суммѣ; слѣд. въ суммѣ второй части ξ пробѣгаетъ всѣ члены ариѳметической прогрессіи съ разностью h отъ a до x *исключительно* (exclusive). Эта формула показываетъ, что какъ скоро мы зададимъ себѣ значеніе искомой функціи для какого либо частнаго значенія независимой перемѣнной, напр. a: $\Phi(a)=C$; то придавая къ этому C сумму значеній данной функціи $f(\xi)$ для ряда значеній ξ, слѣдующихъ чрезъ промежутки h, отъ a до x исключительно, мы будемъ имѣть значеніе этой функціи для $\xi=x$. Слѣд. эта формула доказываетъ: во 1-хъ: существованіе функціи $\Phi(x)$, имѣющей данную $f(x)$ своею разностью перваго порядка, во 2-хъ, что общее рѣшеніе этого вопроса заключаетъ одну произвольную постоянную (въ смыслѣ § 9)—именно значеніе ея для частнаго значенія независимой перемѣнной: $x=a$; въ 3-хъ тождественность нашего вопроса съ вопросомъ о суммованіи рядовъ, ибо какъ скоро по данной $f(x)$ мы найдемъ въ конечномъ видѣ $\Phi(x)$, то рядъ, котораго $f(\xi)$ есть общій членъ, будетъ просуммированъ въ данныхъ предѣлахъ значеній ξ; отсюда и названіе *сумма* для $\Phi(x)$, знакъ $\sum_{a}^{x} f(x)$ для нея, и названіе *суммированіе* для дѣйствія нахожденія $\Phi(x)$ изъ условія (1). Нахожденіе $\Phi(x)$ въ конечномъ видѣ, т. е. суммированіе $f(x)$, возможно однако въ очень ограниченномъ числѣ случаевъ, замѣтимъ теперь же.

92. Формула (7) предыдущаго § даетъ намъ *исчезающій интегралъ въ конечныхъ разностяхъ* отъ $f(x)$, какъ тоже называютъ сумму отъ $f(x)$, ибо если $x=a$, то $\sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi)=0$, такъ какъ число слагаемыхъ $=0$ (потому

что для верхняго предѣла слагаемое не берется, а оно совпадаетъ съ первымъ); если же положимъ $x=b$, то

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_{\xi=a}^{\xi=b} f(\xi) \tag{1}$$

будетъ *опредѣленный* интегралъ въ конечныхъ разностяхъ отъ $f(x)$. Изъ формулы (7) предыдущаго § мы получимъ:

$$\Phi(x)=\Phi(a)+\sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi); \tag{2}$$

или, полагая $\Phi(a)=C$:

$$\Phi(x)=C+\sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi). \tag{3}$$

Этотъ интегралъ, какъ заключающій произвольную постоянную величину C, называется *неопредѣленнымъ* интеграломъ въ конечныхъ разностяхъ или *неопредѣленною суммою*. Его короче обозначаютъ такъ:

$$\Phi(x)=\sum f(x), \tag{4}$$

опуская предѣлы; но такъ какъ всѣ способы суммированія даютъ всегда частный интегралъ, то къ полученному какимъ бы то ни было способомъ интегралу въ конечныхъ разностяхъ отъ $f(x)$ надобно прибавить произвольную постоянную C, (въ смыслѣ раньше указанномъ), такъ что и получимъ результатъ вида (3):

$$\Phi(x)=\sum f(x)+C, \tag{5}$$

гдѣ теперь $\sum f(x)$ представляетъ частное значеніе интеграла въ конечныхъ разностяхъ, которое даетъ употребленный для полученія его способъ.

93. Когда найденъ неопредѣленный интегралъ въ конечныхъ разностяхъ, то легко найдутся и исчезающій, и опредѣленный. Если $\Phi(x)$ должно быть $=0$ при $x=a$, то полагая въ (5) предыдущаго § $x=a$, мы будемъ имѣть:

$$0=\sum^{x=a} f(x)+C, \tag{1}$$

гдѣ $\sum^{x=a} f(x)$ обозначаетъ результатъ вставки a вмѣсто x въ частное рѣшеніе, представляемое знакомъ $\sum f(x)$; отсюда

$$C = -\sum^{x=a} f(x); \tag{2}$$

внося это въ (5) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$\Phi(x) = \sum^{x} f(x) - \sum^{x=a} f(x) = \sum_{a}^{x} f(x); \tag{3}$$

ибо $\sum^{x} f(x)$ и $\sum^{x=a} f(x)$ представляютъ суммы значеній $f(x)$ отъ того значенія x, для котораго это частное значеніе обращается въ нуль, соотвѣтственно до x и до a; производя сокращеніе на общихъ слагаемыхъ, получимъ сумму значеній $f(x)$ отъ $x = a$ до какого либо x исключительно. Если это значеніе x дано и есть b, то мы будемъ имѣть опредѣленную сумму, или опредѣленный интегралъ въ конечныхъ разностяхъ:

$$\Phi(b) = \sum_{a}^{b} f(x).$$

Если положимъ $x = b$ въ (3), то будемъ имѣть:

$$\sum^{x=b} f(x) - \sum^{x=a} f(x) = \sum_{a}^{b} f(x);$$

т. е. опредѣленный интегралъ въ конечныхъ разностяхъ получится, если въ неопредѣленный интегралъ вставить верхній предѣлъ суммы вмѣсто x, затѣмъ нижній и результатъ послѣдней вставки вычесть изъ результата первой вставки. Отсюда мы видимъ, что умѣя находить неопредѣленный интегралъ въ конечныхъ разностяхъ, легко найдемъ и исчезающій, и опредѣленный, взятый между данными предѣлами; но это удается, какъ было уже замѣчено, лишь въ очень немногихъ случаяхъ, къ обозрѣнію которыхъ и переходимъ, но прежде выведемъ общія основныя предложенія съ помощію которыхъ суммированіе болѣе сложныхъ функцій сводится къ суммированію простѣйшихъ.

94. 94. Эти основныя предложенія обратнаго исчисленія конечныхъ разностей совершенно аналогичны таковымъ интегральнаго исчисленія. Изъ самаго опредѣленія дѣйствія, обозначаемаго знакомъ $\sum$, слѣдуетъ, что

$$\triangle \sum f(x) = f(x);$$

Условное обозначеніе §92 ф.3

$$\varphi(x) = C + \sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi) = \sum f(x).$$

т. е. что операціи $\triangle$ послѣ $\sum$ ~~подъ~~ Надъ $f(x)$, приводимъ опять къ данной функціи; также

$$\sum \triangle f(x) = f(x) + C;$$

т. е. суммированіе разности данной функціи приводитъ къ самой функціи, если не обращать вниманія на придаточную постоянную (постоянную, въ смыслѣ раньше объясненномъ); короче это выражаютъ, говоря, что:

I. Знаки $\triangle$ и $\sum$ одинъ послѣ другаго взаимно уничтожаются.

Далѣе изъ равенства (§ (9)):

$$\triangle A u_x = A \triangle u_x,$$

слѣдуетъ, на основаніи предыдущаго:

$$\sum \triangle A u_x = A u_x = \sum A \triangle u_x;$$

но $u_x = \sum \triangle u_x$; слѣд.

$$A \sum \triangle u_x = \sum A \triangle u_x,$$

или полагая $\triangle u_x = v_x$:

$$\sum A v_x = A \sum v_x;$$

отсюда слѣдуетъ, что:

II. Постоянный множитель можетъ быть выносимъ за знакъ $\sum$, и подводимъ подъ этотъ знакъ.

Еще мы имѣли въ § 9:

$$\triangle\left(U_x + V_x - W_x\right) = \triangle U_x + \triangle V_x - \triangle W_x;$$

суммируя обѣ части получимъ отсюда на основаніи (I):

$$U_x + V_x - W_x = \sum\left(\Delta U_x + \Delta V_x - \Delta W_x\right);$$

или, полагая:

$$U_x = \sum u_x; \quad V_x = \sum v_x; \quad W_x = \sum w_x,$$

и имѣя опять въ виду предложеніе I:

$$\sum u_x + \sum v_x - \sum w_x = \sum\left(u_x + v_x - w_x\right),$$

т. е.

III. Интегралъ въ конечныхъ разностяхъ отъ алгебраической суммы функцій (вторая часть послѣдняго равенства) равняется такой же алгебраической суммѣ интеграловъ въ конечныхъ разностяхъ отъ отдѣльныхъ слагаемыхъ (первая часть его) — если не обращать вниманія на произвольную постоянную, которая заключается въ самомъ понятіи неопредѣленнаго интеграла въ конечныхъ разностяхъ.

95. Въ § 10 мы имѣли, далѣе, что если

(1) $$y_x = u_x \cdot w_x,$$

то

(2) $$\Delta y_x = u_x \Delta w_x + w_{x+h} \Delta u_x;$$

суммируя обѣ части и принимая во вниманіе предложенія I и III предыдущаго §, мы будемъ имѣть:

$$\sum \Delta y_x = y_x = \sum u_x \Delta w_x + \sum w_{x+h} \Delta u_x,$$

отсюда по (1) получимъ:

(3) $$\sum u_x \cdot \Delta w_x = u_x \cdot w_x - \sum w_{x+h} \cdot \Delta u_x;$$

если положимъ теперь

$$\Delta w_x = v_x,$$

то будетъ

$$w_x = \sum_{\alpha}^{x} v_x, \tag{4}$$

и потому

$$w_{x+h} = \sum_{\alpha}^{x+h} v_x, \tag{5}$$

гдѣ $\sum\limits_{\alpha}^{x} v_x$ обозначаетъ какую либо изъ функцій имѣющихъ v_x своей разностью, обращающуюся въ нуль при нѣкоторомъ значеніи $x = \alpha$; такъ какъ эта послѣдняя величина не играетъ никакой роли, то ее обыкновенно опускаютъ, оставляя одинъ верхній предѣлъ; внося тогда изъ (4) и (5) въ (3), получимъ такую формулу, называемую *формулою суммированія по частямъ:*

Условное обозначение § 92 ф. 3 и ф. 4

$\Phi(x) = C + \sum\limits_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi) = \sum f(x)$

$$\sum u_x \,.\, v_x = u_x \sum v_x - \sum\left[\left(\sum^{x+h} v_x\right)\triangle u_x\right]; \tag{6}$$

эта формула позволяетъ просуммировать произведеніе двухъ функцій $u_x v_x$, если мы съумѣемъ просуммировать множитель v_x, и функцію $\left(\sum\limits^{x+h} v_x\right)\triangle u_x$.

96. Примѣняя формулу (6) суммированія по частямъ къ выраженію:

$$\sum u_x \triangle^{\lambda} v_x \tag{1}$$

получимъ другую формулу, которая представляетъ какъ бы обобщеніе этой. Мы имѣемъ сперва по (6):

$$\sum u_x \triangle^{\lambda} v_x = u_x \triangle^{\lambda-1} v_x - \sum\left[\triangle u_x \,.\, \triangle^{\lambda-1} v_{x+h}\right]; \tag{2}$$

потомъ по ней же:

$$\left.\begin{aligned}
\sum \triangle u_x \,.\, \triangle^{\lambda-1} v_{x+h} &= \triangle u_x \,.\, \triangle^{\lambda-2} v_{x+h} - \sum \triangle^{2} u_x \triangle^{\lambda-2} v_{x+2h}, \\
\sum \triangle^{2} u_x \,.\, \triangle^{\lambda-2} v_{x+2h} &= \triangle^{2} u_x \,.\, \triangle^{\lambda-3} v_{x+2h} - \sum \triangle^{3} u_x \triangle^{\lambda-3} v_{x+3h} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum \triangle^{\lambda-1} u_x \,.\, \triangle v_{x+\overline{\lambda-1}h} &= \triangle^{\lambda-1} u_x \,.\, v_{x+\overline{\lambda-1}h} - \sum \triangle^{\lambda} u_x \,.\, v_{x+\lambda h};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$U_x + V_x - W_x = \sum\left(\triangle U_x + \triangle V_x - \triangle W_x\right);$$

или, полагая:

$$U_x = \sum u_x; \quad V_x = \sum v_x; \quad W_x = \sum w_x,$$

и имѣя опять въ виду предложеніе I:

$$\sum u_x + \sum v_x - \sum w_x = \sum\left(u_x + v_x - w_x\right),$$

т. е.

III. Интегралъ въ конечныхъ разностяхъ отъ алгебраической суммы функцій (вторая часть послѣдняго равенства) равняется такой же алгебраической суммѣ интеграловъ въ конечныхъ разностяхъ отъ отдѣльныхъ слагаемыхъ (первая часть его) — если не обращать вниманія на произвольную постоянную, которая заключается въ самомъ понятіи неопредѣленнаго интеграла въ конечныхъ разностяхъ.

95. Въ § 10 мы имѣли, далѣе, что если

$$y_x = u_x \,.\, w_x, \tag{1}$$

то

$$\triangle y_x = u_x \triangle w_x + w_{x+h} \triangle u_x; \tag{2}$$

суммируя обѣ части и принимая во вниманіе предложенія I и III предыдущаго §, мы будемъ имѣть:

$$\sum \triangle y_x = y_x = \sum u_x \triangle w_x + \sum w_{x+h} \triangle u_x,$$

Условное обозначение § 92 ф. 3 и ф. 4 $\varphi(x) = C + \sum_{\xi=a}^{\xi=x} f(\xi) = \sum f(x)$

отсюда по (1) получимъ:

$$\sum u_x \,.\, \triangle w_x = u_x \,.\, w_x - \sum w_{x+h} \,.\, \triangle u_x; \tag{3}$$

если положимъ теперь

$$\triangle w_x = v_x,$$

то будетъ

$$w_x = \sum_{\alpha}^{x} v_x, \tag{4}$$

и потому

$$w_{x+h} = \sum_{\alpha}^{x+h} v_x, \tag{5}$$

гдѣ $\sum\limits_{\alpha}^{x} v_x$ обозначаетъ какую либо изъ функцій имѣющихъ v_x своей разностью, обращающуюся въ нуль при нѣкоторомъ значеніи $x = \alpha$; такъ какъ эта послѣдняя величина не играетъ никакой роли, то ее обыкновенно опускаютъ, оставляя одинъ верхній предѣлъ; внося тогда изъ (4) и (5) въ (3), получимъ такую формулу, называемую *формулою суммированія по частямъ:*

$$\sum u_x \, . \, v_x = u_x \sum v_x - \sum \left[\left(\sum^{x+h} v_x \right) \triangle u_x \right]; \tag{6}$$

эта формула позволяетъ просуммировать произведеніе двухъ функцій $u_x v_x$, если мы съумѣемъ просуммировать множитель v_x, и функцію $\left(\sum\limits^{x+h} v_x\right) \triangle u_x$.

96. Примѣняя формулу (6) суммированія по частямъ къ выраженію:

$$\sum u_x \triangle^{\lambda} v_x \tag{1}$$

получимъ другую формулу, которая представляетъ какъ бы обобщеніе этой. Мы имѣемъ сперва по (6):

$$\sum u_x \triangle^{\lambda} v_x = u_x \triangle^{\lambda-1} v_x - \sum \left[\triangle u_x \, . \, \triangle^{\lambda-1} v_{x+h} \right]; \tag{2}$$

потомъ по ней же:

$$\left.\begin{aligned}
\sum \triangle u_x \, . \, \triangle^{\lambda-1} v_{x+h} &= \triangle u_x \, . \, \triangle^{\lambda-2} v_{x+h} - \sum \triangle^2 u_x \triangle^{\lambda-2} v_{x+2h}, \\
\sum \triangle^2 u_x \, . \, \triangle^{\lambda-2} v_{x+2h} &= \triangle^2 u_x \, . \, \triangle^{\lambda-3} v_{x+2h} - \sum \triangle^3 u_x \triangle^{\lambda-3} v_{x+3h} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum \triangle^{\lambda-1} u_x \, . \, \triangle v_{x+\overline{\lambda-1}h} &= \triangle^{\lambda-1} u_x \, . \, \triangle v_{x+\overline{\lambda-1}h} - \sum \triangle^{\lambda} u_x \, . \, v_{x+\lambda h};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

вставляя изъ каждой формулы въ предыдущую и наконецъ во (2), мы получимъ:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum u_x \Delta^\lambda v_x = u_x \Delta^{\lambda-1} v_x - \Delta u_x \cdot \Delta^{\lambda-2} v_{x+h} + \Delta^2 u_x \cdot \Delta^{\lambda-3} v_{x+2h} - \\ &- \ldots + (-1)^{\lambda-1} \Delta^{\lambda-1} u_x \cdot v_{x+\overline{\lambda-1}h} + (-1)^\lambda \sum \Delta^\lambda u_x \cdot v_{x+\lambda h}. \end{aligned} \right.$$

Если u_x есть цѣлая функція степени не выше $\lambda - 1$, то $\Delta^\lambda u_x = 0$, и во второй части не будетъ послѣдняго члена, содержащаго сумму. Отсюда заключаетъ, что по этой формулѣ всегда можно просуммировать данную функцію, когда ее удастся представить въ видѣ произведенія полинома нѣкоторой степени μ на разность нѣкоторой функціи порядка не ниже $\mu + 1$.

Значеніе аргумента (независимой перемѣны) x во вторыхъ множителяхъ второй части предыдущей формулы представляютъ возрастающую ариѳметическую прогрессію съ разностью h, тогда какъ въ первомъ множителѣ аргументъ вездѣ x; есть и другая формула того же вида, но въ которой значенія аргумента x въ первыхъ множителяхъ представляютъ убывающую ариѳметическую прогрессію съ разностію h, тогда какъ во вторыхъ множителяхъ оно постоянно $= x$. Чтобы вывести эту формулу, мы замѣтимъ сперва, что, если

$$y_x = u_x \cdot w_x,$$

то точно также будетъ

$$\Delta y_x = u_{x+h} \Delta w_x + w_x \Delta u_x;$$

откуда суммируя и перенося второй членъ въ другую часть, получимъ:

$$\sum u_{x+h} \Delta w_x = u_x \cdot w_x - \sum w_x \Delta u_x;$$

перемѣняя здѣсь въ u_x перемѣнную x на $x - h$, будемъ имѣть:

$$(5)\qquad \sum u_x \cdot \Delta w_x = u_{x-h} \cdot w_x - \sum w_x \Delta u_{x-h};$$

наконецъ, полагая $\Delta w_x = v_x$, слѣд. $w_x = \sum v_x$, получимъ *вторую формулу суммированія по частямъ:*

$$(6)\qquad \sum u_x \cdot v_x = u_{x-h} \sum v_x - \sum \Big(\sum v_x \Big) \cdot \Delta u_{x-h}.$$

Съ помощію этой формулы, примѣняя ее къ функціи $u_x \triangle^{\lambda} v_x$, получимъ, какъ выше, такую формулу:

$$\left.\begin{array}{l}\sum u_x \triangle^{\lambda} v_x = u_{x-h} \triangle^{\lambda-1} v_x - \triangle u_{x-2h} \triangle^{\lambda-2} v_x + \triangle^2 u_{x-3h} \triangle^{\lambda-3} v_x - \\ \quad - \ldots + (-1)^{\lambda-1} \triangle^{\lambda-1} u_{x-\lambda h} v_x + (-1)^{\lambda} \sum \triangle^{\lambda} u_{x-\lambda h} v_x ,\end{array}\right\} \quad (7)$$

которою пользовался Ак. Чебышевъ въ своемъ мемуарѣ „объ интерполированіи“.

97. Разсмотримъ теперь главнѣйшіе случаи, когда возможно получить сумму данной функціи въ конечномъ видѣ. Во первыхъ всегда можно просуммировать факторіэль:

$$\sum x^{(m|h)}. \quad (1)$$

Мы имѣли:

$$\triangle x^{(n|h)} = nhx^{(n-1|h)};$$

полагая здѣсь $n - 1 = m$, мы легко получимъ отсюда:

$$x^{(m|h)} = \frac{\triangle x^{(m+1|h)}}{(m+1)h};$$

суммируя это равенство, примѣняя ко второй части предложенія II, а затѣмъ I § 94, мы будемъ имѣть:

$$\sum x^{(m|h)} = \sum \frac{\triangle x^{(m+1|h)}}{(m+1)h} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)h} \sum \triangle x^{(m+1|h)} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)h} x^{(m+1|h)} + C;$$

итакъ

$$\sum x^{(m|h)} = \frac{x^{(m+1|h)}}{(m+1)h} + C, \quad (2)$$

т. е. чтобы найти сумму факторіэля, надобно степень его увеличить на единицу, и раздѣлить на новаго показателя и на h; затѣмъ придать произвольное постоянное. — Эта формула вѣрна и для отрицательныхъ факторіэлей, въ чемъ читатель можетъ убѣдиться такимъ же образомъ, такъ что, полагая $m = -n$, мы будемъ имѣть:

$$\sum x^{(-n|h)} = -\frac{x^{(-(n-1)|h)}}{(n-1)h} + C. \tag{3}$$

Эта формула теряетъ смыслъ только для $m = -1$ (или $n = 1$), и слѣд. факторіэль:

$$x^{(-1|h)} = \frac{1}{x},$$

не можетъ быть просуммировать въ конечномъ видѣ, а потому функція, имѣющая $x^{(-1|h)}$ своею разностью перваго порядка, можетъ быть только обозначена такъ:

$$\sum x^{(-1|h)}. \tag{4}$$

Примѣчаніе. Если имѣемъ просуммировать единицу: 1, т. е. найти $\sum 1$, то замѣчая, что по условію § 12 имѣемъ $x^{(0|h)} = 1$, мы можемъ и эту сумму найти по формулѣ (2); именно:

$$\sum 1 = \sum x^{(0|h)} = \frac{x^{(1|h)}}{1.h} + C. \tag{5}$$

94. Умѣя суммировать факторіэли, мы можемъ просуммировать и цѣлыя функціи и дробныя, знаменатель которыхъ есть факторіэль, (послѣднія съ указаннымъ ограниченіемъ). Дѣйствительно, разлагая данную цѣлую функцію u_x степени n по факторіэлямъ, мы будемъ имѣть (см. § 14):

$$u_x = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!h^m} x^{(m|h)}; \tag{1}$$

а потому на основаніи общихъ предложеній § 94, мы будемъ имѣть:

$$\sum u_x = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{m!h^m} \sum x^{(m|h)},$$

а это по формулѣ (2) предыдущаго § приведется къ такому равенству:

$$\sum u_x = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m u_0}{(m+1)!\,h^{m+1}}\, x^{(m+1|h)} + C. \tag{2}$$

Въ частности, когда $u_x = x^n$, мы имѣемъ:

$$x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{m!\,h^m}\, x^{(m|h)};$$

слѣд.

$$\sum x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m+1)!\,h^{m+1}}\, x^{(m+1|h)} + C. \tag{3}$$

Если $h=1$, то эта формула приметъ такой видъ:

$$\sum x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m+1)!}\, x^{(m+1)} + C, \tag{4}$$

гдѣ $x^{(m+1)}$ $m+1$-ый факторіэль съ разностью $h=1$. Исчезающая вмѣстѣ съ x сумма выразится такъ:

$$\sum_0^x x^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m+1)!}\, x^{(m+1)}. \tag{5}$$

99. По этой формулѣ находятся суммы одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ отъ 0 до какого либо числа N. Полагая въ этой формулѣ въ верхнемъ предѣлѣ:

$$x = N+1,$$

мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^{N+1} x^n &= 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + N^n = \\ &= \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m+1)!}\,(N+1)^{(m+1)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или выписывая факторіэль $(N+1)^{(m+1)}$ полностію:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + N^n = \\ & = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{\Delta^m 0^n}{(m+1)!} (N+1)N(N-1)\ldots(N-m+1). \end{aligned} \right.$$

Полагая здѣсь $n=1$, 2, 3... получимъ суммы первыхъ, вторыхъ, третьихъ и т. д. степеней натуральныхъ чиселъ по порядку отъ 1 до N.

Для $n=1$ имѣемъ:

$$(3) \qquad 1+2+3+\ldots+N = \frac{(N+1)N}{1.2},$$

ибо $m=0$ и 1; а

$$\Delta^0 0^1 = 0^1 = 0; \quad \Delta^1 0^1 = 1^1 - 0^1 = 1.$$

Далѣе для $n=2$ имѣемъ:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2 = \\ & = \frac{\Delta^0 0^2}{1!}(N+1) + \frac{\Delta^1 0^2}{2!}(N+1)N + \frac{\Delta^2 0^2}{3!}(N+1)N(N-1); \end{aligned} \right.$$

но

$$\Delta^0 0^2 = 0^2 = 0; \quad \Delta^1 0^2 = 1^2 - 0^2 = 1; \quad \Delta^2 0^2 = 2^2 - 2.1^2 + 0^2 = 4 - 2 = 2;$$

потому въ (4) вторая часть приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{2}(N+1)N + \frac{2}{3!}(N+1)N(N-1) = \frac{(N+1)N}{3!}(3+2N-2) =$$
$$= \frac{(N+1)N(2N+1)}{3!},$$

и слѣд. будетъ сумма

$$(5) \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2 = \frac{(N+1)N(2N+1)}{6}.$$

100. Суммы квадратовъ и кубовъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до N можно получить легко и не прибѣгая къ общей формулѣ (2) предыдущаго §. Мы имѣемъ:

$$x^2 = x(x-1) + x;$$

слѣдовательно

$$\sum_0^{N+1} x^2 = \sum_0^{N+1} x(x-1) + \sum_0^{N+1} x; \tag{1}$$

но

$$\sum_0^{N+1} x = \frac{(N+1)N}{2}, \tag{2}$$

какъ то извѣстно и изъ элементарной алгебры; далѣе

$$\sum_0^{N+1} x(x-1) = \left[\frac{x^{(3)}}{3}\right]_0^{N+1} = \frac{(N+1)N(N-1)}{3}; \tag{3}$$

§97 р. 2.

вносян отсюда и изъ (2) въ (1), получимъ:

$$\sum_0^{N+1} x^2 = \frac{(N+1)N}{2} + \frac{(N+1)N(N-1)}{3} = \frac{(N+1)N(2N+1)}{6},$$

т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2 = \frac{(N+1)N(2N+1)}{6}, \tag{4}$$

какъ и выше было найдено.

Еще имѣемъ:

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x; \tag{5}$$

суммируя обѣ части отъ 0 до $N+1$, будемъ имѣть:

$$\sum_0^{N+1} x^3 = \sum_0^{N+1} x(x-1)(x-2) + 3\sum_0^{N+1} x^2 - 2\sum_0^{N+1} x; \tag{6}$$

внося сюда вмѣсто суммъ квадратовъ и первыхъ степеней натуральныхъ чиселъ ихъ найденныя выше значенія, (формулы (3) и (2)), а также имѣя въ виду, что

$$\sum_0^{N+1} x(x-1)(x-2) = \frac{(N+1)N(N-1)(N-2)}{4}, \tag{7}$$

мы будемъ имѣть:

$$\sum_{0}^{N+1} x^3 = \frac{(N+1)N(N-1)(N-2)}{4} + 3\,\frac{(N+1)N(2N+1)}{6} - 2\,\frac{(N+1)N}{2} =$$

$$= \frac{(N+1)N}{4}\Big[(N-1)(N-2)+4N+2-4\Big] = \frac{(N+1)N}{4}\Big[N^2+N\Big]$$

т. е.

$$(8) \qquad \sum_{0}^{N+1} x^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+N^3 = \left(\frac{(N+1)N}{2}\right)^2;$$

это на основанiи (2) можно еще и такъ написать:

$$(9) \qquad \sum_{0}^{N+1} x^3 = \left[\sum_{0}^{N+1} x\right]^2,$$

т. е. сумма кубовъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до N включительно равняется квадрату ихъ суммы.

101. Формула (5) предыдущаго § сводитъ кубъ x къ линейной функцiи третьяго факторiэля и нисшихъ степеней, т. е. квадрату и первой; это обстоятельство позволило вычислить сумму кубовъ, когда были найдены суммы квадратовъ и первыхъ степеней x; подобную общую формулу, которая сводила-бы суммированiе какой либо степени къ суммированiю нисшихъ степеней и факторiэля той же степени не трудно вывести. Дѣйствительно раскрывая факторiэль степени n, будемъ имѣть:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1)) = \\ & = x^n - (1+2+3+\ldots+\overline{n-1})x^{n-1} + (1.2+1.3+2.3+\ldots+\overline{n-1}.\overline{n-2})x^{n-2} + \\ & \qquad + \ldots + (-1)^n\, 1.2.3\ldots\overline{n-1}; \end{aligned} \right.$$

отсюда взявъ x^n, получимъ, просуммировавъ:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \sum x^n = \sum x^{(n)} + (1+2+\ldots+\overline{n-1}) \sum x^{n-1} - (1.2+1.3+\ldots+\overline{n-1}.\overline{n-2}) \sum x^{n-2} + \\ & \qquad + \ldots - (-1)^n\, 1.2.3\ldots\overline{n-1} \sum x^0, \end{aligned} \right.$$

формула, сводящая вычисленiе суммы n-ыхъ степеней x на суммы нисшихъ степеней. Однако эта формула не столь изящна и удобна какъ формула (2) § 99.

102. Если дано просуммировать функцiю

$$(1) \qquad v_x = \frac{u_x}{x^{(p|h)}},$$

гдѣ u_x цѣлая функцiя; то разлагая ее по факторiэлямъ, мы дадимъ ей такой видъ (см. § 17 (10)):

$$\left.\begin{aligned} v_x = \frac{u_x}{x^{(p|h)}} = \sum_{m=0}^{m=p-1} \frac{\triangle^m u_0}{m!\,h^m} y^{(-(p-m)|h)} + \\ + \frac{\triangle^p u_0}{p!\,h^p} + \\ + \sum_{m=p+1}^{m=n} \frac{\triangle^m u_0}{m!\,h^m} z^{(m-p|h)}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

гдѣ

$$y = x - \overline{p-1}h; \qquad z = x - ph. \quad (3)$$

Такъ какъ $z^{(0|h)} = 1$ (§ 10), то среднiй членъ можно такъ написать:

$$\frac{\triangle^p u_0}{p!\,h^p} z^{(0|h)};$$

тогда по формуламъ (2), (3) и (5) § 97 мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sum v_x = \sum \frac{u_x}{x^{(p|h)}} = -\sum_{m=0}^{m=p-2} \frac{\triangle^m u_0}{m!\,h^{m+1}} \frac{y^{(-(p-m-1)|h)}}{p-m-1} + \frac{\triangle^{p-1} u_0}{(p-1)!h^{p-1}} \sum y^{(-1|h)} + \\ + \frac{\triangle^p u_0}{p!h^{p+1}} z^{(1|h)} + \\ + \sum_{m=p+1}^{m=n} \frac{\triangle^m u_0}{m!h^{m+1}} \frac{z^{(m-p+1|h)}}{m-p+1} + C, \end{aligned}\right\} (4)$$

гдѣ мы отъ первой суммы отдѣлили членъ, отвѣчающiй $m = p - 1$, ибо онъ не можетъ быть выраженъ независимо отъ знака $\sum$. Членъ второй строки одного типа съ членами третьей; потому его можно подвести съ этими подъ одну сумму, начиная только суммированiе отъ $m = p$. Вставляя вмѣсто y и z ихъ значенiя изъ (3), мы получимъ окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{u_x}{x^{(p|h)}} = -\sum_{m=0}^{m=p-2} \frac{\triangle^m u_0}{m!h^{m+1}} \cdot \frac{(x-\overline{p-1}h)^{(-(p-m-1)|h)}}{p-m-1} + \\ + \frac{\triangle^{p-1} u_0}{(p-1)!h^{p-1}} \cdot \sum (x-\overline{p-1}h)^{(-1|h)} + \\ + \sum_{m=p}^{m=n} \frac{\triangle^m u_0}{m!h^{m+1}} \cdot \frac{(x-ph)^{(m-p+1|h)}}{m-p+1} + C. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Если $p > n$, то въ этой формулѣ будутъ только члены первой строчки, причемъ верхнимъ предѣломъ будетъ не $p-2$, а n, какъ легко видѣть.

103. Переходимъ теперь къ трансцендентнымъ функціямъ и начнемъ съ показательной a^x. Мы имѣли въ § 22:

$$\triangle a^x = a^x(a^h - 1);$$

отсюда

$$a^x = \frac{\triangle a^x}{a^h - 1};$$

суммируя, получимъ по II и I § 94:

$$\sum a^x = \frac{1}{a^h - 1} \sum \triangle a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C;$$

итакъ

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C,$$

т. е. для того, чтобы получить сумму отъ a^x, надобно эту функцію раздѣлить на $a^h - 1$ (тогда какъ для взятія разности отъ нея надобно было помножить на эту величину) и придать произвольное постоянное C.



104. Пусть теперь

$$u_x = \log(ax + b); \tag{1}$$

тогда

$$\sum_{\alpha}^{x} u_x = \sum_{\alpha}^{x} \log(ax + b) = \log \prod_{\alpha}^{x} (ax + b) + C. \tag{2}$$

означая знакомъ $\prod\limits_{\alpha}^{x}$ произведеніе множителей, выводимыхъ изъ стоящаго за нимъ, давая x всѣ значенія отъ α до какого нибудь x. Какъ видимъ, суммированіе log приводитъ опять къ log, какъ и взятіе разности отъ него (см. §§ 23, 24).

105. Пусть

$$u_x = \sin(ax + b); \tag{1}$$

мы имѣли

$$\triangle \sin(ax+\beta) = 2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(ax+\beta+\frac{ah+\pi}{2}\right); \qquad (2)$$

если положимъ

$$\beta + \frac{ah+\pi}{2} = b\,, \qquad (3)$$

то изъ (2) будемъ имѣть:

$$\sin(ax+b) = \frac{\triangle \sin\left(ax+b-\dfrac{ah+\pi}{2}\right)}{2\sin\dfrac{ah}{2}}; \qquad (4)$$

суммируя обѣ части, получимъ:

$$\sum \sin(ax+b) = \frac{\sin\left(ax+b-\dfrac{ah+\pi}{2}\right)}{2\sin\dfrac{ah}{2}} + C. \qquad (5)$$

Также найдемъ:

$$\sum \cos(ax+b) = \frac{\cos\left(ax+b-\dfrac{ah+\pi}{2}\right)}{2\sin\dfrac{ah}{2}} + C. \qquad (6)$$

Эти формулы (5) и (6) показываютъ, что суммы отъ $\sin(ax+b)$ или $\cos(ax+b)$ найдутся, когда мы изъ дуги вычтемъ $\dfrac{ah+\pi}{2}$, а саму тригонометрическую величину раздѣлимъ на $2\sin\dfrac{ah}{2}$ — дѣйствія обратныя тѣмъ, которыя мы дѣлали въ §§ 25 и 26 для полученія разности этихъ функцій.

106. Если

$$u_x = \sin(ax+b)\sin(cx+d)\ldots\sin(gx+k)\,, \qquad (1)$$

(а также если нѣкоторыя sin, или и всѣ, перемѣнимъ на cos), то эту функцію можно преобразовать въ сумму sin и cos различныхъ дугъ вида $Ax+B$, которыя просуммируемъ по правилу предыдущаго §. Равнымъ образомъ, если имѣемъ

$$u_x = \sin^m x \cos^n x\,, \qquad (2)$$

то, какъ степени sin и cos могутъ быть выражены чрезъ sin и cos кратныхъ дугъ *), мы опять получимъ сумму членовъ вида

$$\sin(ax+b)\cos(cx+d),$$

которые опять приведутся къ суммѣ членовъ вида $\sin(Ax+B)$ или $\cos(Ax+B)$.

107. Разсмотримъ теперь комбинаціи алгебраическихъ и трансцендентныхъ функцій. Если

(1) $$v_x = a^x . u_x,$$

гдѣ u_x цѣлая функція, то суммированіе возможно по частямъ или постепенно, или сразу по формулѣ (4) или (7) § 96. Если u_x степени m, то полагая въ формулѣ (4) $\lambda = m+1$, и имѣя въ виду, что

(2) $$\triangle^p a^x = a^x(a^h-1)^p,$$

откуда для $p=m+1$

(3) $$a^x = \triangle^{m+1}\frac{a^x}{(a^h-1)^{m+1}},$$

мы получимъ:

$$\sum u_x a^x = \sum u_x \triangle^{m+1}\frac{a^x}{(a^h-1)^{m+1}} = u_x\triangle^m\frac{a^x}{(a^h-1)^{m+1}} - \triangle u_x \triangle^{m-1}\frac{a^{x+h}}{(a^h-1)^{m+1}} +$$
$$+\triangle^2 u_x\triangle^{m-2}\frac{a^{x+2h}}{(a^h-1)^{m+1}} - \ldots + (-1)^m\triangle^m u_x . \frac{a^{x+mh}}{(a^h-1)^{m+1}} + C;$$

беря въ каждомъ членѣ разности по формулѣ (2) и вынося $\frac{a^x}{a^h-1}$ за скобки, мы будемъ имѣть окончательно:

(4) $$\left\{\begin{aligned}\sum u_x a^x = \frac{a^x}{a^h-1}\Big\{u_x - \left(\frac{a^h}{a^h-1}\right)\triangle u_x + \left(\frac{a^h}{a^h-1}\right)^2\triangle^2 u_x - \ldots +\\ +(-1)^m\left(\frac{a^h}{a^h-1}\right)^m\triangle^m u_x\Big\} + C.\end{aligned}\right.$$

*) См. Краткій курсъ Высшей Алгебры. М. Тихомандрицкаго. Харьковъ 1887 г. стр. 22.

108 108. Также точно можно просуммировать функціи: $u_x \sin(ax+b)$ и $u_x \cos(ax+b)$, если u_x есть цѣлая функція степени m. Чтобы это сдѣлать, напишемъ сперва формулу (4) § 96 короче такимъ образомъ:

$$\sum u_x \Delta^\lambda v_x = \sum_{i=0}^{i=\lambda-1} (-1)^i \Delta^i u_x . \Delta^{\lambda-i-1} v_{x+ih} + (-1)^\lambda \sum \Delta^\lambda u_x . v_{x+\lambda h}; \quad (1)$$

если u_x цѣлая функція степени m, то, положивъ $\lambda = m+1$, мы получимъ формулу въ которой не будетъ непросуммированнаго члена, именно:

$$\sum u_x \Delta^{m+1} v_x = \sum_{i=0}^{i=m} (-1)^i \Delta^i u_x \Delta^{m-i} v_{x+ih} \quad (2)$$

Здѣсь мы должны принять

$$\Delta^{m+1} v_x = \sin(ax+b). \quad (3)$$

Если имѣемъ

$$v_x = C\sin(ax+\beta), \quad (4)$$

то

$$\Delta^{m+1} v_x = C\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{m+1} \sin\left(ax+\beta+\overline{m+1}\,\frac{ah+\pi}{2}\right); \quad (5)$$

сличая это съ (3), находимъ, что должно принять въ (4):

$$C = \frac{1}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{m+1}} \quad (6)$$

и

$$\beta = b-(m+1)\frac{ah+\pi}{2}; \quad (7)$$

принявъ это, изъ (4) будемъ имѣть:

$$v_x = \frac{\sin\left(ax+b-(m+1)\frac{ah+\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{m+1}} \quad (8)$$

Беря отъ этого выраженія разность $m-i$-го порядка, будемъ имѣть:

$$(9) \qquad \triangle^{m-i} v_x = \frac{\sin\left(ax + b - (i+1)\frac{ah+\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{i+1}};$$

перемѣняя здѣсь x на $x + ih$, получимъ:

$$\triangle^{m-i} v_{x+ih} = \frac{\sin\left(ax + b + (i-1)\frac{ah-\pi}{2} - \pi\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{i+1}}$$

или окончательно

$$(10) \qquad \triangle^{m-i} v_{x+ih} = -\frac{\sin\left(ax + b + (i-1)\frac{ah-\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{i+1}}:$$

внося изъ (10) и (3) во (2), получимъ:

$$(11) \qquad \sum u_x \sin(ax+b) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{i+1} \triangle^i u_x \frac{\sin\left(ax+b+(i-1)\frac{ah-\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{i+1}} + C.$$

подобная же формула имѣется и для $\cos(ax+b)$:

$$(12) \qquad \sum u_x \cos(ax+b) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{i+1} \triangle^i u_x \frac{\cos\left(ax+b+(i-1)\frac{ah-\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^{i+1}} + C.$$

109. Обѣ формулы могутъ быть также получены при помощи формулъ

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}; \\ \cos x &= \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}; \end{aligned}\right\}$$

при помощи этихъ формулъ вопросъ о нахожденіи $\sum u_x \sin x$ и $\sum u_x \cos x$ сведется къ вопросу § 107. Такъ

$$\sum u_x \cos x = \frac{1}{2}\left\{\sum u_x (e^i)^x + \sum u_x (e^{-i})^x\right\}; \qquad (2)$$

а здѣсь первая сумма найдется по формулѣ (4) § 107, полагая тамъ $a = e^i$, вторая—полагая $a = e^{-i}$; послѣ этого только останется подставить вмѣсто e съ мнимыми показателями ихъ выраженія чрезъ sin и cos и сдѣлать упрощенія.

110. Подобнымъ образомъ при помощи формулъ (1) предыдущаго § можно найти суммы вида

$$\sum u_x a^x \cos(\alpha x + \beta) \quad \text{и} \quad \sum u_x a^x \sin(\alpha x + \beta). \qquad (1)$$

Обѣ заразъ легко найдутся: помножая вторую на i и складывая, по формулѣ:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z, \qquad (2)$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sum u_x a^x \Big[\cos(\alpha x + \beta) + i \sin(\alpha x + \beta)\Big] &= \sum u_x a^x e^{(\alpha x + \beta) i} = \\ &= e^{\beta i} \sum u_x (a e^{\alpha i})^x; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

послѣднюю сумму найдемъ по (4) § 107 перемѣняя тамъ a на $ae^{\alpha i}$; вставляя сюда, отдѣляя вещественное отъ мнимаго, получимъ, сравнивая съ первою частью, искомыя суммы (1). Хотя этимъ способомъ можно получить и общую формулу для случая u_x степени n, но мы ограничимся однимъ примѣромъ, который достаточно уяснитъ примѣненіе этого метода. Пусть требуется найти

$$\sum x^{(2|h)} a^x \cos x; \qquad (1)$$

вмѣсто этого мы ищемъ

$$\sum x^{(2|h)} a^x e^{xi} = \sum x^{(2|h)} (ae^i)^x. \qquad (2)$$

По формулѣ (4) § 107, перемѣняя тамъ a на ae^i, мы получимъ, раскрывая еще скобки:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum x^{(2|h)}(ae^{i})^{x} = \frac{(ae^{i})^{x}}{(ae^{ih}-1)}x^{(2,h)} - \\ &-\frac{(ae^{i})^{x+h}}{(ae^{ih}-1)^{2}}\,2\,.\,h\,x^{(1|h)} + \frac{(ae^{i})^{x+2h}}{(ae^{ih}-1)^{3}}\,2\,.\,1\,.\,h^{2} + C; \end{aligned} \right.$$

помножая каждый членъ на выраженіе, сопряженное его знаменателю, мы получимъ:

$$(4)\left\{ \begin{aligned} &\sum a^{(2,h)}(ae^{i})^{x} = \frac{a^{x+h}e^{i(x-h)} - a^{x}e^{ix}}{a^{2h}-2a^{h}\cos h+1}x^{(2|h)} - \\ &\quad -\frac{a^{x+3h}e^{i(x-h)} - 2a^{x+2h}e^{ix} + a^{x+h}e^{i(x+h)}}{(a^{2h}-2a^{h}\cos h+1)^{2}}\,2hx^{(1|h)} + \\ &\quad +\frac{a^{x+5h}e^{i(x-h)} - 3a^{x+4h}e^{ix} + 3a^{x+3h}e^{i(x+h)} - a^{x+2h}e^{i(x+2h)}}{(a^{2h}-2a^{h}\cos h+1)^{3}}\,2.1.h^{2} + C. \end{aligned} \right.$$

Замѣняя здѣсь показательныя функціи, содержащія i, ихъ выраженіями чрезъ тригонометрическія, и сравнивая вещественныя части, получимъ требуемую сумму; [сравнивая мнимыя, получимъ сумму отличающуюся отъ требуемой тѣмъ, что вмѣсто $\cos x$ войдетъ $\sin x$]:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\sum x^{(2,h)}a^{x}\cos x = \frac{a^{x+h}\cos(x-h) - a^{x}\cos x}{a^{2h}-2a^{h}\cos h+1}x^{(2,h)} - \\ &-\frac{a^{x+3h}\cos(x-h) - 2a^{x+2h}\cos x + a^{x+h}\cos(x+h)}{(a^{2h}-2a^{h}\cos h+1)^{2}}\,2hx^{(1|h)} + \\ &+\frac{a^{x+5h}\cos(x-h) - 3a^{x+4h}\cos x + 3a^{x+3h}\cos(x+h) - a^{x+2h}\cos(x+2h)}{(a^{2h}-2a^{h}\cos h+1)^{3}}\,2.1.h^{2} + C. \end{aligned}$$

111. Сумма данной функціи u_x:

$$(1)\qquad \sum u_x = v_x + C,$$

какъ тоже функція отъ x, можетъ быть опять суммируема; сдѣлавъ это, мы будемъ имѣть сумму второго порядка, которая такъ обозначается:

$$(2)\qquad \sum\sum u_x = \sum^{(2)} u_x = \sum (v_x + C).$$

Такъ какъ $1 = x^{(0|h)}$ [см. § 12, формула (3)], то

$$\sum(v_x+C)=\sum(v_x+Cx^{(0|h)})=$$
$$=\sum v_x+C\sum x^{(0|h)}=$$
$$=w_x+C\frac{x^{(1|h)}}{1.h}+C_1,$$

гдѣ $w_x=\sum v_x$ есть частное рѣшеніе; внося это во (2), будемъ имѣть:

$$\sum^{(2)}u_x=w_x+C\frac{x^{(1|h)}}{1.h}+C_1; \tag{3}$$

суммируя это равенство и означая частное значеніе $\sum w_x$ чрезъ t_x, будемъ имѣть:

$$\sum\sum^{(2)}u_x=\sum^{(3)}u_x=t_x+C\frac{x^{(2|h)}}{2.1.h^2}+C_1\frac{x^{(1|h)}}{1.h}+C_2. \tag{4}$$

Продолжая суммировать вновь каждый полученный результатъ, мы послѣ n такихъ операцій получимъ n-ую сумму, или сумму n-го порядка, въ такомъ видѣ:

$$\sum^{(n)}u_x=U_x+F(x,C,C_1,C_2\ldots C_{n-1}), \tag{5}$$

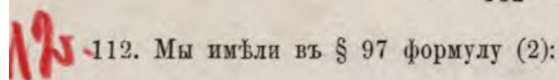
гдѣ U_x обозначаетъ частное рѣшеніе, т. е. одну изъ такихъ функцій которыя имѣютъ u_x своею n-ою разностью:

$$\triangle^n U_x=u_x, \tag{6}$$

а

$$\left.\begin{aligned}F(x,C,C_1,C_2\ldots C_{n-1})=C\frac{x^{(n-1|h)}}{(n-1)!h^{n-1}}+C_1\frac{x^{(n-2|h)}}{(n-2)!h^{n-2}}\\+C_2\frac{x^{(n-3|h)}}{(n-3)!h^{n-3}}+\ldots+C_{n-2}\frac{x^{(1|h)}}{1.h}+C_{n-1},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

гдѣ C, C_1, $C_2\ldots C_{n-1}$ произвольныя постоянныя; дѣлители факторіэлей по желанію могутъ быть скрыты въ произвольныхъ постоянныхъ C и проч. Какъ видимъ изъ (5), общее рѣшеніе уравненія (6) получится, когда мы къ частному его рѣшенію U_x придадимъ цѣлую функцію степени $n-1$, разложенную по факторіэлямъ, съ произвольными коэффиціентами, числомъ n. Въ силу этого, переходя къ примѣрамъ, мы будемъ отыскивать частныя рѣшенія, и приписывать къ нимъ $F(x,C,C_1,C_2\ldots C_{n-1})$, опредѣляемую формулою (7).



112. Мы имѣли въ § 97 формулу (2):

$$\sum x^{(m|h)} = \frac{x^{(m+1|h)}}{(m+1)h} + C;$$

полагая $C = 0$, мы получимъ частное рѣшеніе:

$$(1) \qquad \sum x^{(m|h)} = \frac{x^{(m+1|h)}}{(m+1)h};$$

суммируя это выраженіе по этой же формулѣ, мы послѣ n-разъ повторенной операціи найдемъ частное рѣшеніе:

$$\sum^{(n)} x^{(m|h)} = \frac{x^{(m+n|h)}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)h^n};$$

слѣд. общее рѣшеніе будетъ:

$$(2) \qquad \sum^{(n)} x^{(m|h)} = \frac{x^{(m+n|h)}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)h^n} + F(x, C, C_1, C_2 \ldots C_{n-1}).$$

Пусть требуется найти

$$(3) \qquad \sum^{(n)} a^x;$$

по формулѣ § 103, будемъ имѣть:

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a^h - 1};$$

отсюда чрезъ повторенное суммированіе находимъ:

$$(4) \qquad \sum^{(n)} a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + F(x, C, C_1, C_2 \ldots C_{n-1}).$$

Пусть требуется найти

$$\sum^{(n)} \sin(ax+b); \qquad \sum^{(n)} \cos(ax+b);$$

мы видѣли въ 105, что для того, чтобы просуммировать $\sin(ax+b)$ или $\cos(ax+b)$, нужно аргументъ уменьшить на $\frac{ah+\pi}{2}$ и результатъ раздѣлить на $2\sin\frac{ah}{2}$; слѣд. для того чтобы получить n-кратную сум-

му, нужно только повторить эту операцію n-разъ; слѣд. въ итогѣ уменьшить аргументъ на $n\frac{ah+\pi}{2}$, и результатъ раздѣлить на $\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n$; мы получимъ тогда частное рѣшеніе; придавая $F(C, C_1, C_2 \dots C_{n-1})$, получимъ общее рѣшеніе такого вида:

$$\left.\begin{aligned} \sum^{(n)}\sin(ax+b) &= \frac{\sin\left(ax+b-n\frac{ah+\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n}+F(x, C, C_1 \dots C_{n-1}); \\ \sum^{(n)}\cos(ax+b) &= \frac{\cos\left(ax+b-n\frac{ah+\pi}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n}+F(x, C, C_1 \dots C_{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

113. Если умѣемъ находить кратные интегралы отъ u_x, и разности v_x, то можно найти $\sum u_x.v_x$ и $\sum^{(m)} u_x.v_x$. Мы вывели въ § 95 такую формулу (6):

$$\sum u_x.v_x = v_x \sum^{x} u_x - \sum\left(\sum^{x+h} u_x\right)\Delta v_x; \qquad (1)$$

по этой самой формулѣ найдемъ:

$$\sum\left(\sum^{x+h} u_x\right)\Delta v_x = \Delta v_x \sum^{x+h \,(2)} u_x - \sum\left(\sum^{x+2h \,(2)} u_x\right)\Delta^2 v_x;$$

$$\sum\left(\sum^{x+2h \,(2)} u_x\right)\Delta^2 v_x = \Delta^2 v_x \sum^{x+2h \,(3)} u_x - \sum\left(\sum^{x+3h \,(3)} u_x\right)\Delta^3 v_x;$$

. . . .

$$\sum\left(\sum^{x+\overline{n-1}h \,(n-1)} u_x\right)\Delta^{n-1} v_x = \Delta^{n-1} v_x \sum^{x+\overline{n-1}h \,(n)} u_x - \sum\left(\sum^{x+nh \,(n)} u_x\right)\Delta^n v_x;$$

поставляя изъ каждой формулы въ предыдущую, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sum u_x.v_x = {} & v_x \sum^{x} u_x - \Delta v_x \sum^{x+h \,(2)} u_x + \Delta^2 v_x \sum^{x+2h \,(3)} u_x - \Delta^3 v_x \sum^{x+3h \,(4)} u_x + \\ & + \dots + (-1)^{n-1}\Delta^{n-1} v_x \sum^{x+\overline{n-1}h \,(n)} u_x + (-1)^n \sum\left(\sum^{x+nh \,(n)} u_x\right)\Delta^n v_x. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Если v_x полиномъ степени $n-1$, то послѣдняя сумма $=0$, и интегралъ лѣвой части будетъ найденъ, коль скоро будемъ умѣть находить кратные интегралы u_x до порядка n.

114. Возьмемъ теперь сумму отъ (2)-во второй части отъ каждаго члена порознь по формулѣ (2), доводя до суммы n-го порядка отъ u_x, получимъ:

$$\sum{}^{(2)}u_xv_x=v_x\overset{x}{\sum}{}^{(2)}u_x-$$

$$-\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(3)}u_x+\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(4)}u_x-\ldots+(-1)^{n-2}\Delta^{n-2}v_x\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x$$

$$-\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(3)}u_x+\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(4)}u_x-\ldots+(-1)^{n-2}\Delta^{n-2}v_x\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x$$

$$+\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(4)}u_x-\ldots+(-1)^{n-2}\Delta^{n-2}v_x\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\Delta^{n-2}v_x\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x$$

$$+(-1)^{n-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x$$

$$+(-1)^n\sum{}^{(2)}\left(\overset{x+nh}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^nv_x,$$

т. е., имѣя въ виду, что $k=C_1^k$,

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\sum{}^{(2)}u_xv_x=v_x\overset{x}{\sum}{}^{(2)}u_x-C_1^2\,\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(3)}u_x+C_1^3\,\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(4)}u_x-\ldots+\\&+(-1)^{n-2}C_1^{n-1}\Delta^{n-2}v_x\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-1}C_1^n\sum\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x+\\&+(-1)^n\sum{}^{(2)}\left(\overset{x+nh}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^nv_x\end{aligned}\right.$$

Суммируя эту формулу, каждый членъ второй части опять по формулѣ (2) предыдущаго §, доводя до суммы n-го порядка отъ u_x, получимъ, имѣя въ виду формулу (3) § 35, слѣдующую формулу:

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\sum{}^{(3)}u_xv_x=v_x\overset{x}{\sum}{}^{(3)}u_x-C_2^3\,\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(4)}u_x+C_2^4\,\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(5)}u_x-\\&-\ldots+(-1)^{n-3}C_2^{n-1}\Delta^{n-3}v_x\overset{x+\overline{n-3}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-2}C_2^{n}\sum\left(\overset{x+\overline{n-2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-2}v_x+\\&+(-1)^{n-1}C_1^n\sum{}^{(2)}\left(\overset{x+\overline{n-1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-1}v_x+(-1)^n\sum{}^{(3)}\left(\overset{x+nh}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^nv_x.\end{aligned}\right.$$

Продолжая это, приходимъ къ такой формулѣ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum^{(m)}u_xv_x=v_x\overset{x}{\sum}{}^{(m)}u_x-C^m_{m-1}\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(m+1)}u_x+C^{m+1}_{m-1}\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(m+2)}u_x-\ldots+\\
&+(-1)^{n-m}C^{n-1}_{m-1}\Delta^{n-m}v_x\overset{x+\overline{n-m}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-m+1}C^n_{m-1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-m+1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-m+1}v_x+\\
&(-1)^{n-m+2}C^n_{m-2}\sum^{(2)}\left(\overset{x+\overline{n-m+2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-m+2}v_x+\ldots+(-1)^n\sum^{(m)}\left(\overset{x+nh}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^nv_x.
\end{aligned}\right\}(3)$$

Для доказательства этой формулы остается показать, что если просуммируемъ ее еще разъ—каждый членъ второй части по формулѣ (2) предыдущаго §, то получится формула, которая изъ этой выведется чрезъ перемѣну m на $m+1$. Доказательство это, какъ не представляющее никакихъ затрудненій, предоставляемъ выполнить самому читателю. Формула эта дана еще Тэйлоромъ, но нѣсколько въ другомъ видѣ, который получится отсюда на основаніи того замѣчанія, что

$$C^p_q=C^p_{p-q}; \qquad (4)$$

по этой формулѣ будетъ именно:

$$C^m_{m-1}=C^m_1;\quad C^{m+1}_{m-1}=C^{m+1}_2;\quad C^{m+2}_{m-1}=C^{m+2}_3;$$
$$\ldots C^{n-1}_{m-1}=C^{n-1}_{n-m};\ C^n_{m-1}=C^n_{n-m+1},\ \text{и т. д.}$$

и потому формулѣ (3) можно дать такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum^{(m)}u_xv_x=v_x\overset{x}{\sum}{}^{(m)}u_x-C^m_1\Delta v_x\overset{x+h}{\sum}{}^{(m+1)}u_x+C^{m+1}_2\Delta^2v_x\overset{x+2h}{\sum}{}^{(m+2)}u_x-\ldots\\
&+(-1)^{n-m}C^{n-1}_{n-m}\Delta^{n-m}v_x\overset{x+\overline{n-m}h}{\sum}{}^{(n)}u_x+(-1)^{n-m+1}C^n_{n-m+1}\sum\left(\overset{x+\overline{n-m+1}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-m+1}v_x+\\
&(-)^{n-m+2}C^n_{n-m+2}\sum^{(2)}\left(\overset{x+\overline{n-m+2}h}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^{n-m+2}v_x+\ldots+(-1)^n\sum^{(m)}\left(\overset{x+nh}{\sum}{}^{(n)}u_x\right)\Delta^nv_x;
\end{aligned}\right\}(5)$$

нижніе указатели C идутъ возрастая до n, оставаясь всегда равными показателю порядка разности отъ v_x въ томъ же членѣ.

115. Въ статьѣ „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ общихъ функцій Бернулли", (приложеніе къ LII записокъ Импер. Академ. Наукъ, стр. 14), Ак. Имшенецкій далъ формулу, для преобразованія кратной суммы въ

простую, аналогичную формулѣ преобразованія кратнаго интеграла въ простой. Пусть:

$$(1) \qquad z_x = \sum_{y=a}^{y=x} f(x, y),$$

гдѣ x въ $f(x, y)$ играетъ роль параметра, и приращеніе y есть $h = \frac{x-a}{n}$. Давая x приращеніе $\triangle x = h$, будемъ имѣть:

$$(2) \qquad z_{x+h} = \sum_{y=a}^{y=x+h} f(x+h,y) = \sum_{y=a}^{y=x} f(x+h,y) + f(x+h,x);$$

вычитая отсюда (1), получимъ:

$$(3) \qquad \triangle z_x = \sum_{y=a}^{y=x} \triangle_x f(x,y) + f(x+h,x),$$

—формула аналогичная формулѣ дифференцированія опредѣленнаго интеграла по параметру. Примемъ теперь въ этой формулѣ

$$(4) \qquad f(x,y) = u_y \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x-y}{h} - 1 \right)^{(n-1|h)};$$

тогда

$$(5) \qquad \triangle_x^k f(x,y) = u_y \frac{1}{(n-k-1)!} \left(\frac{x-y}{h} - 1 \right)^{(n-k-1|h)};$$

внося изъ (5) для $k = 1$ въ (3), будемъ имѣть:

$$(6) \qquad \triangle z_x = \sum_{y=a}^{y=x} \left[u_y \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{x-y}{h} - 1 \right)^{(n-2|h)} \right];$$

ибо $f(x+h, x) = 0$, такъ какъ второй множитель въ (4) при $x - y = h$ обращается въ нуль; но тѣмъ же свойствомъ по (5) обладаетъ и $\triangle_x^k f(x, y)$; а потому примѣняя постоянно формулу (3) къ каждому имѣющемуся получиться результату, придемъ наконецъ къ такому окончательному:

$$(7) \qquad \triangle^{n-1} z_x = \sum_{y=a}^{y=x} u_y,$$

откуда получимъ:

$$\Delta^n z_x = u_x. \tag{8}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$z_x = \sum\nolimits^{(n)} u_x; \tag{9}$$

одно частное рѣшеніе мы получимъ, вставляя значеніе $f(x, y)$ изъ (4) въ (1); оно будетъ

$$z_x = \sum_{y=a}^{y=x} u_y \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x-y}{h} - 1\right)^{(n-1|h)}; \tag{10}$$

придавая къ нему $F(x, C, C_1, \ldots, C_{n-1})$ — цѣлый полиномъ степени $n-1$ [(7) § 111], мы получимъ общее выраженіе функціи z_x, удовлетворяющей условію (8), т. е. общее выраженіе $\sum^{(n)} u_x$, именно:

$$\sum\nolimits^{(n)} u_x = \sum_{y=a}^{y=x} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x-y}{h} - 1\right)^{(n-1|h)} u_y + F(x, C, C_1, \ldots C_{n-1}); \tag{11}$$

это и есть искомая формула; она лишь обозначеніемъ отличается отъ формулы (27) стр. 16 цитированной выше статьи Ак. Имшенецкаго, и представляетъ полную аналогію съ извѣстной формулой интегральнаго исчисленія:

$$\int^{(n)} F(x)dx^n = \int_{x_0}^{x} F(y)\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}dy + Cx^{n-1} + C_1x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}. \text{*)} \tag{12}$$

---

*) См. напр. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal. T. II. Paris 1879, p. 396.

ГЛАВА VI.

Соотношеніе между суммою и интеграломъ; формула Маклореня. Формула Стирлинга.

116. Въ виду чрезвычайной ограниченности числа случаевъ, когда суммированіе можетъ быть выполнено въ конечномъ видѣ, формула выражающая соотношеніе между суммою и интеграломъ, къ выводу которой мы теперь переходимъ, пріобрѣтаетъ и практическій интересъ, такъ какъ позволяетъ сводить суммированіе на интегрированіе, удающееся въ гораздо большемъ числѣ случаевъ. Кромѣ того эта же формула можетъ служить для приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ. Формула эта дана въ первый разъ *Маклоренемъ* *), потомъ была вновь выведена *Эйлеромъ* **), (почему многими называется и доселѣ формулою Эйлера).

Маклорень и Эйлеръ дали свою формулу безъ остаточнаго члена согласно тогдашнему состоянію теоріи рядовъ; въ послѣдствіи, съ развитіемъ этой теоріи обнаружена была необходимость разсмотрѣнія остаточнаго члена.

Въ первый разъ остаточный членъ этой формулы былъ данъ Пуассономъ ***), но при помощи однако средствъ, чуждыхъ разсматриваемому вопросу; первый надлежащій выводъ былъ данъ *Остроградскимъ* ****); позже остаточный членъ былъ полученъ вновь *Мальмстеномъ* *****) съ помощію почти тождественнаго анализа который и вошелъ въ курсъ

---

*) *Maclaurin.* Treatise of Fluxion. London 1742.

**) *Euler. L.* Institutiones Calculi differentialis. Pars posterior. Cap. V § 115.

***) *Poisson.* Memoire sur le calcul des intégrales definies. (Mémoires de l'Academie, 1823 p. 571).

****) *Ostrogradsky.* Mémoire sur les quadratures définies lu le 23 Août 1839. Напечатано въ мемуарахъ Академіи наукъ въ 1841 году.

*****) *Malmsten.* Crelle. Bd. 35. 1847.

разностнаго исчисленія *Буля**) и въ курсѣ анализа *Шлёмильха***). Простой и изящный выводъ формулы Маклорена съ остаточнымъ членомъ далъ Ак. В. Г. Имшенецкій въ статьѣ „О функціяхъ Бернулли и выраженіи разности между однопредѣльною суммою и интеграломъ“, помѣщенной въ ученыхъ запискахъ Имп. Казанскаго университета за 1870 г.***). Мы будемъ въ нашемъ изложеніи въ существенномъ, особенно въ началѣ, придерживаться мемуара Остроградскаго, дополняя потомъ по Шлёмильху, Булю, Имшенецкому и другимъ.

117. Исходной точкой нашего вывода будетъ служить опять, какъ и во II-ой главѣ при выводѣ выраженій разностей высшаго порядка чрезъ производныя, система уравненій (2) § 40, которую [безъ послѣдняго уравненія, но съ присоединеніемъ уравненія (5) § 39] мы еще разъ здѣсь выписываемъ:

$$
(1)\left\{\begin{aligned}
\Delta u_x &= hu'_x+\frac{h^2}{1.2}u''_x+\frac{h^3}{1.2.3}u'''_x+\ldots+\frac{h^m}{m!}u_x^{(m)}+h^{m+1}\int_0^1\frac{z^m}{m!}u^{(m+1)}_{x+h-hz}\,dz\\
\Delta u'_x &= hu''_x+\frac{h^2}{1\,.\,2}u'''_x+\ldots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}u_x^{(m)}+h^m\int_0^1\frac{z^{m-1}}{(m-1)!}u^{(m+1)}_{x+h-hz}\,dz\\
\Delta u''_x &= hu'''_x+\ldots+\frac{h^{m-2}}{(m-2)!}u_x^{(m)}+h^{m-1}\int_0^1\frac{z^{m-2}}{(m-2)!}u^{(m+1)}_{x+h-hz}\,dz\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta u_x^{(m-1)} &= \frac{h}{1}u_x^{(m)}+h^2\int_0^1\frac{z}{1}u^{(m+1)}_{x+h-hz}\,dz
\end{aligned}\right.
$$

Помноживъ эти равенства по порядку на 1, на A_1h, на $A_2h^2,\ldots$ послѣднее на $A_{m-1}h^{m-1}$ и взявъ сумму этихъ произведеній, мы получимъ такое равенство:

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&\Delta u_x+A_1h\Delta u'_x+A_2h^2\Delta u''_x+\ldots+A_{m-1}h^{m-1}\Delta u_x^{(m-1)}=\\
&\qquad=hu'_x+h^{m+1}\int_0^1\varphi(z,m)u^{(m+1)}_{x+h-hz}\,dz\,,
\end{aligned}\right.
$$

гдѣ

*) *Boole* G. Treatise on the Calculus of finite differences. Third edition. London 1880. p. 149.

**) *Schlömilch*. Compendium der höheren Analysis. 2-e Auflage. Braunschweig 1874. Bd. II (Die Bernoulli'schen Functionen und die halbconvergente Reihen. p. 207).

***) [Вошло въ книгу Hoüel'я: Cours de calcul infinitésimal. Paris, 1878. T. I, p. 473, § 495]. Сюда же относятся и слѣдующія работы того же автора: „Sur la généralisation des fonctions de J. Bernoulli“. Mém. de l'Acad. Imp. des scienses. t. XXXI, VII. serie 1883. и „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ общихъ функцій Бернулли“. LII томъ записокъ Имп. Академіи Наукъ. Спб. 1886 г.

$$(3)\qquad \varphi(z,m)=\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{z^{m-1}}{(m-1)!}+A_2\frac{z^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots+A_{m-1}z,$$

— когда опредѣлимъ коэффиціенты $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{m-1}$ изъ уравненій, получаемыхъ отъ приравниванія нулю коэффиціентовъ при $u''_x, u'''_x, \ldots u_x^{(m-1)}$ въ имѣющемся получиться равенствѣ, именно изъ уравненій:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{1.2}+A_1=0 \\ \frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+A_2=0 \\ \frac{1}{1.2.3.4}+\frac{A_1}{1.2.3}+\frac{A_2}{1.2}+A_3=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{m!}+\frac{A_1}{(m-1)!}+\frac{A_2}{(m-1)!}+\frac{A_3}{(m-3)!}+\ldots+A_{m-1}=0. \end{cases}$$

118. 118. Цѣлая функція степени m, опредѣляемая формулою (3), въ которой коэффиціенты опредѣляются изъ уравненій (4) предыдущаго §, называется *функціей Бернулли* *); настоящій § мы посвятимъ изложенію главныхъ свойствъ ея. Во первыхъ прямо изъ опредѣленія Бернулліевой функціи ((3) предыдущаго §) (4) видно, что

$$(1)\qquad \varphi(0,m)=0;$$

подставляя въ (3) вмѣсто z единицу, на основаніи послѣдняго изъ (4), мы будемъ имѣть:

$$(2)\qquad \varphi(1,m)=0.$$

Далѣе, беря производную отъ обѣихъ частей (3), мы будемъ имѣть:

$$(3)\quad \varphi'(z,m)=\frac{z^{m-1}}{(m-1)!}+A_1\frac{z^{m-2}}{(m-2)!}+A_2\frac{z^{m-3}}{(m-3)!}+\ldots+A_{m-2}z+A_{m-1},$$

т. е. по обозначенію (3):

$$(4)\qquad \varphi'(z,m)=\varphi(z,m-1)+A_{m-1}.$$

Дифференцируя это равенство, будемъ имѣть:

*) Бертранъ называетъ функціей Бернулли произведеніе нами такъ названной на $(m-1)!$, Шлёмильхъ — на $m!$; но мы предпочитаемъ опредѣленіе текста согласно съ Ак. Имшенецкимъ, обозначая однако функцію по Шлёмильху.

$$\varphi''(z,m) = \varphi'(z,m-1) = \varphi(z,m-2) + A_{m-2}; \tag{5}$$

продолжая дифференцировать послѣдовательно каждое получающееся равенство, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'''(z,m) = \varphi(z,m-3) + A_{m-3}, \\ &\varphi^{IV}(z,m) = \varphi(z,m-4) + A_{m-4}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi^{(m-1)}(z,m) = \varphi(z,1) + A_1, \\ &\varphi^{(m)}(z,m) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ибо

$$\varphi(z,1) = z, \tag{7}$$

какъ то слѣдуетъ изъ (3) предыдущаго §.

Полагая въ (4), (5), (6) $z=1$, и имѣя въ виду, что (2) имѣетъ мѣсто для всякаго $m>1$ (по (4) предыдущаго §), а по (7) настоящаго

$$\varphi(1,1) = 1, \tag{8}$$

мы получимъ для производныхъ отъ $\varphi(z,m)$ при $z=1$ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(1,m)=A_{m-1},\ \varphi''(1,m)=A_{m-2},\ \varphi'''(1,m)=A_{m-3},\dots \\ &\dots\varphi^{(m-2)}(1,m)=A_2,\ \varphi^{(m-1)}(1,m)=1+A_1,\ \varphi^{(m)}(1,m)=1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Изъ нихъ по первому изъ уравненій (4) предыдущаго §, значеніе производной $m-1$-го порядка можетъ быть еще такъ представлено:

$$\varphi^{(m-1)}(1,m) = -A_1. \tag{10}$$

Разлагая теперь $\varphi(z,m)$ по степенямъ $z-1$ по строкѣ Тэйлора, и располагая члены въ обратномъ порядкѣ, на основаніи (2), (9) и (10) мы получимъ такое выраженіе для этой функціи:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z,m) = &\frac{(z-1)^m}{m!} - A_1\frac{(z-1)^{m-1}}{(m-1)!} + A_2\frac{(z-1)^{m-2}}{(m-2)} + \\ &+ A_3\frac{(z-1)^{m-3}}{(m-3)!} + \dots + A_{m-1}(z-1). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

119. Полагая здѣсь $z=0$, мы получимъ для m четнаго, $m=2p$:

$$(1)\ \frac{1}{(2p)!}+\frac{A_1}{(2p-1)!}+\frac{A_2}{(2p-2)!}-\frac{A_3}{(2p-3)!}+\frac{A_4}{(2p-4)!}-\ldots-A_{2p-1}=0;$$

для m нечетнаго, $m=2p+1$:

$$(2)\ -\frac{1}{(2p+1)!}-\frac{A_1}{(2p)!}-\frac{A_2}{(2p-1)!}+\frac{A_3}{(2p-2)!}-\frac{A_4}{(2p-3)!}+\ldots-A_{2p}=0;$$

въ обоихъ равенствахъ, начиная съ третьяго члена, знаки $+$ и $-$ чередуются. Положивъ въ послѣднемъ изъ уравненій (4) § 117 $m=2p$, и складывая его съ (1) настоящаго, мы получимъ по раздѣленіи всего на 2:

$$(3)\qquad \frac{1}{(2p)!}+\frac{A_1}{(2p-1)!}+\frac{A_2}{(2p-2)!}+\frac{A_4}{(2p-4)}+\ldots+\frac{A_{2p-2}}{2!}=0;$$

положивъ въ томъ же уравненіи $m=2p+1$ и складывая со (2) настоящаго §, получимъ:

$$(4)\qquad \frac{A_3}{(2p-2)!}+\frac{A_5}{(2p-3)!}+\ldots+\frac{A_{2p-1}}{1.2}=0.$$

Для $p=2$, это уравненіе обратится въ такое:

$$\frac{A_3}{2!}=0;$$

для $p=3$ въ такое:

$$\frac{A_3}{4!}+\frac{A_5}{3!}=0$$

и т. д.; откуда будетъ слѣдовать, что $A_3=0$; $A_5=0,\ldots$ и вообще $A_{2k+1}=0$, т. е. всѣ A съ нечетными указателями, начиная съ A_3, равны нулю. Если на основаніи этого изъ послѣдняго изъ уравненій (4) § 117, полагая тамъ $m=2p-1$, выбросимъ члены, содержащіе A съ нечетными указателями, какъ равные тождественно нулю, то мы будемъ имѣть для опредѣленія коэффиціентовъ A съ четными указателями еще и уравненія такого вида:

$$(5)\ \frac{1}{(2p-1)!}+\frac{A_1}{(2p-2)!}+\frac{A_2}{(2p-3)!}+\frac{A_4}{(2p-5)!}+\ldots+\frac{A_{2p-4}}{3!}+A_{2p-2}=0.$$

Можно вычислять эти A послѣдовательно или изъ (3), или изъ (5) уравненій. Обѣ системы уравненій даютъ тѣже самыя значенія для коэффиціентовъ, хотя и трудно изъ одной системы вывести другую.

120. Далѣе, сами функціи Бернулліевы для четнаго и нечетнаго показателя на основаніи предыдущаго примутъ теперь такой видъ:

$$\varphi(z,2p)=\frac{z^{2p}}{(2p)!}+A_1\frac{z^{2p-1}}{(2p-1)!}+A_2\frac{z^{2p-2}}{(2p-2)!}+A_4\frac{z^{2p-4}}{(2p-4)!}+\ldots+A_{2p-2}\frac{z^2}{2!}\,; \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z,2p+1)=\frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}+A_1\frac{z^{2p}}{(2p)!}+A_2\frac{z^{2p-1}}{(2p-1)!}+A_4\frac{z^{2p-3}}{(2p-3)!}+\ldots\\ \ldots+A_{2p-2}\frac{z^3}{4!}+A_{2p}z.\end{aligned}\right\}(2)$$

По формулѣ (11) § 118 тѣже функціи представятся еще такъ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z,2p)=\frac{(z-1)^{2p}}{(2p)!}-A_1\frac{(z-1)^{2p-1}}{(2p-1)!}+A_2\frac{(z-1)^{2p-2}}{(2p-2)!}+A_4\frac{(z-1)^{2p-4}}{(2p-4)!}+\\ +\ldots+A_{2p-2}\frac{(z-1)^2}{1.2}\,;\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z,2p+1)=\frac{(z-1)^{2p+1}}{(2p+1)!}-A_1\frac{(z-1)^{2p}}{(2p)!}+A_2\frac{(z-1)^{2p-1}}{(2p-1)!}+A_4\frac{(z-1)^{2p-3}}{(2p-3)!}+\\ +\ldots+A_{2p-2}\frac{(z-1)^3}{3!}+A_{2p}(z-1).\end{aligned}\right\}(4)$$

Подставляя въ обѣихъ послѣднихъ формулахъ $1-z$ вмѣсто z, мы получимъ направо въ (3) $\varphi(z,2p)$, ибо единственный членъ съ нечетною степенью второй послѣ этого будетъ имѣть знакъ $+$, какъ и въ формулѣ (1); направо въ (4) мы будемъ имѣть всѣ члены (2), но съ противными знаками, ибо единственный членъ въ (4), который сохранитъ свой знакъ, такъ какъ содержитъ четную степень, имѣетъ уже знакъ $-$; такимъ образомъ будетъ:

$$\varphi(1-z,2p)=\varphi(z,2p) \quad (5)$$

$$\varphi(1-z,2p+1)=-\varphi(z,2p+1). \quad (6)$$

Слѣдовательно для значеній равноотстоящихъ отъ концевъ интервала $0-1$ первая функція имѣетъ значенія одинаковыя, вторая же равныя, но съ противными знаками; для $z=\frac{1}{2}$ она обратится въ нуль, ибо полагая въ (6) $z=\frac{1}{2}$, будемъ имѣть:

$$\varphi\left(\frac{1}{2},2p+1\right)=-\varphi\left(\frac{1}{2},2p+1\right),$$

что для цѣлой функціи, какова $\varphi(z, 2p+1)$, возможно лишь когда

$$(7) \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+1\right) = 0\,.$$

Такимъ образомъ функція Бернулли нечетной степени между общими корнями 0 и 1 всѣхъ Бернулліевыхъ функцій имѣетъ одинъ корень, именно $z = \frac{1}{2}$; мы увидимъ, что въ этомъ промежуткѣ она не имѣетъ другихъ корней, а функція четной степени вовсе не имѣетъ корней въ этомъ промежуткѣ. Но для этого надобно еще разсмотрѣть поближе производныя этихъ функцій.

121. Уравненія (4), (5) и (6) § 118 теперь, когда вмѣсто коэффиціентовъ съ нечетными указателями введемъ ихъ значенія нуль, обратятся въ такія:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi^{(2k)}(z,2p) = \varphi(z,2p-2k) + A_{2p-2k}\,; \\ \varphi^{(2k+1)}(z,2p) = \varphi(z,2p-2k-1)\,; \end{cases}$$

(ибо $A_{2p-2k-1} = 0$);

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi^{(2k)}(z,2p+1) = \varphi(z,2p+1-2k)\,; \\ \varphi^{(2k+1)}(z,2p+1) = \varphi(z,2p-2k) + A_{2p-2k}\,. \end{cases}$$

Въ частномъ случаѣ $k=0$ послѣднія изъ (1) и (2) дадутъ:

$$(3) \qquad \varphi'(z,2p) = \varphi(z,2p-1),$$

$$(4) \qquad \varphi'(z,2p+1) = \varphi(z,2p) + A_{2p}\,.$$

Интегрируя ихъ отъ $z=0$ до $z=\frac{1}{2}$, будемъ имѣть:

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi'(z,2p)\,dz = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z,2p-1)\,dz\,,$$

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi'(z,2p+1)\,dz = 0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z,2p)\,dz + \frac{1}{2} A_{2p}\,,$$

откуда получимъ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p)dz = -\frac{1}{2} A_{2p}; \tag{7}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p+1)dz = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right). \tag{8}$$

Эти формулы намъ понадобятся впослѣдствіи; но послѣдняя требуетъ еще, чтобы было найдено значеніе $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right)$; это мы сдѣлаемъ въ слѣдующемъ § по способу Ак. Имшенецкаго.

122. Перемѣняя въ (1) предыдущаго § p на $p+1$ и полагая $z=\frac{1}{2}$, мы получимъ (второе — на основаніи (7) § 120):

$$\varphi^{(2k)}\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2-2k\right) + A_{2p+2-2k}; \tag{1}$$

$$\varphi^{(2k+1)}\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+1-2k\right) = 0. \tag{2}$$

Разлагая теперь $\varphi(z, 2p+2)$ по степенямъ $\left(z-\frac{1}{2}\right)$ по строкѣ Тэйлора, на основаніи (1) и (2) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z,2p+2) &= \varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right) + \frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right) + A_{2p}}{1.2}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \\ &+ \frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p-2\right) + A_{2p-2}}{1.2.3.4}\left(z-\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots + \\ &+ \frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) + A_2}{1.2.3.4\ldots(2p)}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2p} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+2)}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{2p+2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ибо производная порядка равнаго степени функціи, есть 1 (см. (6) § 118). Полагая здѣсь $z=1$, мы получимъ, [такъ какъ $\varphi(1, 2p+2)=0$,] слѣдующее:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 0=\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right)+\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right)+A_{2p}}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p-2\right)+A_{2p-2}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{2^4}+ \\ +\ldots+\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right)+A_2}{1.2.3.4\ldots(2p)}\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{1.2.3\ldots(2p+2)}\frac{1}{2^{2p+2}}. \end{aligned}\right.$$

Перемѣнивъ въ (3) § 120 p на $p+1$ и полагая затѣмъ $z=\frac{1}{2}$, мы получимъ, по перенесеніи $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right)$ изъ лѣвой части въ правую, и написавъ члены въ обратномъ порядкѣ, слѣдующее:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0=-\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p+2\right)+\frac{A_{2p}}{1.2}\frac{1}{2^2}+\frac{A_{2p-2}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{2^4}+ \\ +\ldots+\frac{A_2}{1.2.3\ldots(2p)}\frac{1}{2^{2p}}+\frac{A_1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\cdot\frac{1}{2^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+2)!}\frac{1}{2^{2p+2}}; \end{aligned}\right.$$

складывая это съ (4), будемъ имѣть такое уравненіе:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 0=\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right)+2A_{2p}}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p-2\right)+2A_{2p-2}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots \\ \ldots+\frac{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right)+2A_2}{(2p)!}\frac{1}{2^{2p}}+\frac{A_1}{(2p+1)!}\frac{1}{2^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+2)!}\cdot\frac{1}{2^{2p+1}}. \end{aligned}\right.$$

Помножая это уравненіе на 2^{2p+1}, мы получимъ, (написавъ при этомъ члены въ обратномъ порядкѣ):

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 0=\frac{1}{(2p+2)!}+\frac{A_1}{(2p+1)!}+\frac{2\left[\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right)+2A_2\right]}{(2p)!}+\ldots \\ \ldots+\frac{2^{2p-3}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p-2\right)+2A_{2p-2}\right]}{1.2.3.4}+\frac{2^{2p-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right)+2A_{2p}\right]}{1.2}. \end{aligned}\right.$$

Но перемѣняя въ (3) § 119 p на $p+1$, мы будемъ имѣть:

$$(8)\qquad 0=\frac{1}{(2p+2)!}+\frac{A_1}{(2p+1)!}+\frac{A_2}{(2p)!}+\ldots+\frac{A_{2p-2}}{1.2.3.4}+\frac{A_{2p}}{1.2};$$

сличая это съ (7), мы замѣчаемъ, что (7) получится изъ (8) замѣняя A_{2k} чрезъ:

$$2^{2k-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}, 2k\right)+2A_{2k}\right]; \quad [k=1,2,3\ldots p] \tag{9}$$

но, теперь, давая въ (7) и (8) p значенія отъ 1 до p, мы будемъ имѣть двѣ системы уравненій, получаемыхъ изъ

$$0=\frac{1}{(2p+2)!}+\frac{A_1}{(2p+1)!}+\frac{y_1}{(2p)!}+\frac{y_2}{(2p-2)!}+\ldots+\frac{y_{p-1}}{4!}+\frac{y_p}{2!}, \tag{10}$$

(гдѣ p пробѣгаетъ тѣже значенія) чрезъ замѣну y_k въ одной чрезъ A_{2k}, въ другой чрезъ выраженіе (9); отсюда слѣдуетъ, что

$$2^{2k-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}, 2k\right)+2A_{2k}\right]=A_{2k}, \tag{11}$$

(ибо система линейныхъ уравненій (10) имѣетъ одно рѣшеніе); откуда

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2k\right)=-\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}}A_{2k}. \tag{12}$$

Полагая здѣсь $k=p+1$ и внося результатъ въ (8) § 121, будемъ имѣть:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(z,2p+1)dz=-\frac{2^{2p+2}-1}{2^{2p+1}}A_{2p+2}. \tag{13}$$

123. Вернемся послѣ этого отступленія къ формуламъ (1) и (2) § 121. Полагая $z=0$ и $z=1$, мы получимъ для функцій Бернулли четной степени:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(2k)}(0,2p)&=\varphi^{(2k)}(1,2p)=A_{2p-2k};\\ \varphi^{(2k+1)}(0,2p)&=\varphi^{(2k+1)}(1,2p)=0;\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и для функцій Бернулли нечетныхъ степеней:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(2k)}(0,2p+1)&=\varphi^{(2k)}(1,2p+1)=0,\\ \varphi^{(2k+1)}(0,2p+1)&=\varphi^{(2k+1)}(1,2p+1)=A_{2p-2k};\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ибо сами функціи Бернулли обращаются въ нуль для $z=0$ и для $z=1$; но

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi^{(2p-1)}(0,2p) = A_1 \\ \varphi^{(2p-1)}(1,2p) = -A_1, \end{cases}$$

и также

$$\varphi^{(2p)}(0,2p+1) = A_1$$

$$\varphi^{(2p)}(1,2p+1) = -A_1,$$

какъ то слѣдуетъ для $z=0$ изъ (6) и для $z=1$ изъ (10) § 118.

Имѣя это въ виду, мы получимъ такія таблицы значеній: для $\varphi(z, 2p)$ и ея производныхъ:

	φ	φ'	φ''	φ'''	$\varphi^{IV}\ldots\varphi^{(2p-3)}$	$\varphi^{(2p-2)}$	$\varphi^{(2p-1)}$	$\varphi^{(2p)}$
(I) $z=0$	0	0	A_{2p-2}	0	$A_{2p-4}\ldots 0$	A_2	A_1	1
$z=1$	0	0	A_{2p-2}	0	$A_{2p-4}\ldots 0$	A_2	$-A_1$	1

и для $\varphi(z, 2p+1)$ и ея производныхъ:

	φ	φ'	φ''	φ'''	$\varphi^{IV}\ldots\varphi^{(2p-2)}$	$\varphi^{(2p-1)}$	$\varphi^{(2p)}$	$\varphi^{(2p+1)}$
(II) $z=0$	0	A_{2p}	0	A_{2p-2}	$0\ldots 0$	A_2	A_1	1
$z=1$	0	A_{2p}	0	A_{2p-2}	$0\ldots 0$	A_2	$-A_1$	1

Такъ какъ послѣ уничтоженія функція имѣетъ знакъ одинаковый со своей производной, то въ рядахъ для $z=0+\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малая величина, всѣ функціи, которыя для $z=0$, обращаются въ нуль, будутъ имѣть знаки справа стоящихъ отъ нихъ коэффиціентовъ; потому все число перемѣнъ въ этомъ ряду будетъ равно числу перемѣнъ въ знакахъ коэффиціентовъ отъ A_2 до A_{2p-2}, соотвѣтственно до A_{2p}, увеличенное двумя перемѣнами отъ A_2 къ A_1, и отъ A_1 къ 1, (ибо $A_1 = -\frac{1}{2}$, а $A_2 = +\frac{1}{12}$, какъ то видно изъ первыхъ двухъ уравненій (4) § 117); слѣдовательно наибольшее возможное число перемѣнъ будетъ состоять въ рядѣ для $\varphi(z, 2p)$ изъ $p-2$ перемѣнъ коэффиціентовъ отъ A_2 до A_{2p-2} и изъ двухъ отъ 1 до A_2 итого изъ p перемѣнъ, и въ рядѣ для $\varphi(z, 2p+1)$ изъ $p-1$ перемѣнъ коэффиціентовъ отъ A_2 до A_{2p} и изъ двухъ отъ A_1 до A_2, итого изъ $p+1$ перемѣнъ, и это будетъ тогда имѣть мѣсто, когда коэффиціенты, начиная съ A_1 имѣютъ знаки попеременно — и +. Такъ какъ до уничтоженія функція со своею производною имѣетъ знаки противные, то въ рядахъ для $z=1-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малая величина, каждая функція, обращающаяся въ нуль при $z=1$, будетъ имѣть знакъ противный знаку слѣдующаго за ней коэффиціента A, тогда какъ для $z=0+\varepsilon$, онъ

былъ одинакій. Отсюда слѣдуетъ, что если въ первомъ ряду уничтожающаяся функція стояла между двумя A съ одинаковыми знаками, такъ что тамъ было два постоянства, то теперь эти постоянства замѣнятся двумя перемѣнами; если же уничтожающаяся функція стояла (въ ряду для $z = 0 + \varepsilon$) между двумя съ противными знаками, то перемѣнъ и теперь будетъ одна, и она только подвинется на одинъ рангъ въ право при переходѣ отъ $z = +\varepsilon$ съ $z = 1 - \varepsilon$. Отсюда слѣдуетъ, что при существованіи двухъ рядомъ стоящихъ A съ одинаковыми знаками, число перемѣнъ должно было бы увеличиваться при переходѣ отъ $z = +\varepsilon$ къ $z = 1 - \varepsilon$, что невозможно *). Отсюда заключаемъ во-первыхъ: что всѣ коэффиціенты A начиная съ A_1 поперемѣнно отрицательные и положительные; во-вторыхъ, что число перемѣнъ въ ряду для $\varphi(z, 2p)$ и $z = 1 - \varepsilon$ будетъ состоять изъ числа $p - 2$ перемѣнъ коэффиціентовъ отъ A_2 до A_{2p-2}, изъ одной перемѣны отъ φ' къ φ'', и изъ одной отъ φ къ φ'; итого изъ p перемѣнъ — какъ и въ рядѣ для $z = +\varepsilon$; для функціи же $\varphi(z, 2p+1)$, число перемѣнъ будетъ состоять изъ $p - 1$ перемѣнъ отъ A_2 до A_{2p} и изъ одной отъ φ къ φ'; слѣдовательно всего изъ p перемѣнъ. Отсюда заключаемъ по теоремѣ Фурье, что въ разсматриваемомъ промежуткѣ отъ $z = 0$ до $z = 1$ функція $\varphi(z, 2p)$ вовсе не имѣетъ корней, ибо ни одна перемѣна не пропадаетъ при переходѣ z отъ 0 къ 1, (такъ какъ въ обоихъ по p перемѣнъ), а $\varphi(z, 2p+1)$ имѣетъ только одинъ корень, ибо пропадаетъ одна перемѣна, [въ первомъ ряду было $p + 1$, а во второмъ только p]; этотъ корень есть $z = \frac{1}{2}$, какъ то мы видѣли выше. Отсюда слѣдуетъ, что функція $\varphi(z, 2p)$ не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ отъ 0 до 1. Самый знакъ ея опредѣлится по значенію ея для $z = \frac{1}{2}$ и будетъ, какъ то видно изъ формулы (12) § 122 противенъ знаку коэффиціента A_{2p}. Такъ какъ знаки коэффиціентовъ

$$A_1, A_2, A_4, \ldots A_{2p}$$

поперемѣнно — и +, слѣдовательно $A_{2 \cdot 2}$ имѣетъ знакъ —; то A_{2p} будетъ имѣть знакъ $(-1)^{p-1}$; слѣдовательно знакъ $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2p\right)$ будетъ одинаковъ со знакомъ $(-1)^p$, т. е. при p четномъ будетъ +, при p нечетномъ —.

124. Уравненія (4) § 117 суть тѣ самыя, изъ которыхъ опредѣляются коэффиціенты разложенія въ рядъ по степенямъ x функціи

---

*) См. М. Тихомандрицкаго. Краткій курсъ Высшей Алгебры. Харьковъ 1887 г. Гл. IX. Способъ Фурье.

(1) $$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots}.$$

Эта функція конечна для $x=0$, именно $=1$, какъ то видно изъ втораго выраженія ея; въ безконечность обращается для $x=2k\pi i$, гдѣ k цѣлое число, положительное или отрицательное, отличное отъ нуля (ибо $e^{2k\pi i}=1$); для всякихъ другихъ значеній x, вещественныхъ или комплексныхъ она однозначна, конечна и непрерывна; слѣдовательно по теоремѣ Коши разлагается въ рядъ по возрастающимъ положительнымъ степенямъ x, безусловно сходящійся внутри круга радіуса 2π; а потому можно положить:

(2) $$\frac{x}{e^x-1}=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_kx^k+\ldots$$

Вставляя сюда вмѣсто лѣвой части правую часть (1) и освобождая отъ знаменателя, получимъ:

(3) $$1=\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)(1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots);$$

раскрывая скобки и располагая по степенямъ x, затѣмъ сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства, мы будемъ имѣть такую систему уравненій:

(4) $$\begin{cases} 0=\frac{1}{2!}+A_1 \\ 0=\frac{1}{3!}+\frac{A_1}{2!}+A_2 \\ 0=\frac{1}{4!}+\frac{A_1}{3!}+\frac{A_2}{2!}+A_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0=\frac{1}{k!}+\frac{A_1}{(k-1)!}+\frac{A_2}{(k-2)!}+\frac{A_3}{(k-3)!}+\cdots+\frac{A_{k-2}}{2!}+A_{k-1} \end{cases}$$

и т. д.

тождественную съ системой (4) § 117, откуда и опредѣлимъ коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots A_k$.—Мы уже видѣли въ § 119, что коэффиціенты съ нечетными указателями, начиная съ A_3, равны нулю; въ этомъ же можно убѣдиться и такимъ образомъ. Изъ перваго изъ уравненій (4) имѣемъ:

$$A_1 = -\frac{1}{2}; \tag{5}$$

внося это во (2) и перенося этотъ членъ налѣво, мы будемъ имѣть:

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = 1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots; \tag{6}$$

но

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}; \tag{7}$$

отсюда же видно, что первая часть въ (6) есть четная функція x; (дѣйствительно съ перемѣною x на $-x$, первый множитель и знаменатель втораго перемѣнятъ свои знаки, тогда какъ числитель сохранитъ свой знакъ;) а потому и во второй части должна быть четная функція, для чего всѣ A съ нечетными указателями должны обратиться въ нуль.— Въ § 122 мы видѣли, что начиная съ A_1, коэффиціенты отличные отъ нуля (слѣдовательно далѣе съ четными указателями) имѣютъ поперемѣнно знаки — и +, такъ что знакъ A_{2k} одинаковъ съ знакомъ $(-1)^{k-1}$ или что тоже, со знакомъ $(-1)^{k+1}$; а потому можно положить:

$$A_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}, \tag{8}$$

гдѣ B_{2k-1} будетъ положительное число, называемое *Бернулліевымъ*. Изъ уравненій (4), выбирая ихъ чрезъ одно, начиная со втораго, подставляя вмѣсто A_1 его величину $-\frac{1}{2}$, выбрасывая изъ нихъ, какъ равные нулю, члены содержащіе коэффиціенты съ нечетными указателями, а вмѣсто коэффиціентовъ съ четными указателями внося ихъ выраженія (8) чрезъ Бернулліевы числа, мы выведемъ, имѣя въ виду еще, что

$$\frac{1}{(2k+1)!} + A_1\frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2k)!} = -\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}, \tag{9}$$

такую систему уравненій для опредѣленія Бернулліевыхъ чиселъ:

$$(10)\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{B_1}{2!}; \\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5!}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{B_3}{4!}; \\ \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7!}=\frac{1}{5!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{B_3}{4!}+\frac{B_5}{6!}; \\ \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{9!}=\frac{1}{7!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{B_3}{4!}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{B_5}{6!}-\frac{B_7}{8!}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{2k-1}{2}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}=\frac{1}{(2k-1)!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{(2k-3)!}\cdot\frac{B_3}{4!}+\frac{1}{(2k-5)!}\cdot\frac{B_5}{6!}-\ldots \\ \qquad\ldots+(-1)^k\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{B_{2k-3}}{(2k-2)!}+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}. \end{cases}$$

Вводя Бернулліевы числа въ уравненія (3) § 119, и перенося извѣстные члены направо, мы получимъ систему уравненій вида

$$(11)\begin{cases} \frac{1}{(2p-2)!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{(2p-4)!}\cdot\frac{B_3}{4!}+\frac{1}{(2p-6)!}\cdot\frac{B_5}{6!}+\ldots \\ \qquad\ldots+(-1)^p\frac{1}{2!}\cdot\frac{B_{2p-3}}{(2p-2)!}=\frac{p-1}{(2p)!}, \end{cases}$$

изъ которой также послѣдовательно могутъ быть вычислены Бернулліевы числа.

125. Можно получить еще третью систему уравненій для опредѣленія тѣхъ же Бернулліевыхъ чиселъ. Изъ (6) и (7) предыдущаго §, вводя туда Бернулліевы числа, мы получимъ:

$$(1)\ \frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=1+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\ldots$$

Подставляя сюда въ лѣвую часть вмѣсто $e^{\frac{x}{2}}$ и $e^{-\frac{x}{2}}$ ихъ разложенія въ рядъ:

$$(2)\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p+\ldots \\ e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p+\ldots \end{cases}$$

и освобождая отъ знаменателя послѣ легкихъ упрощеній, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{2^4}+\ldots+\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{2k}}+\ldots=\\&=\left(1+\frac{1}{3!}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{5!}\frac{x^4}{2^4}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)!}\frac{x^{2k}}{2^{2k}}+\ldots\right)\times\\&\times\left(1+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\ldots\right)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Раскрывая скобки и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства, мы получимъ для опредѣленія Бернулліевыхъ чиселъ такой рядъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{B_1}{2!};\\&\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{B_3}{4!};\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{(2k-1)!}\cdot\frac{1}{2^{2k-2}}\cdot\frac{B_1}{2!}-\\&-\frac{1}{(2k-3)!}\cdot\frac{1}{2^{2k-4}}\cdot\frac{B_3}{4!}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{B_{2k-3}}{(2k-2)!}+\\&\qquad+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!};\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

и т. д.

Рѣшая которую нибудь изъ трехъ нами найденныхъ системъ уравненій, мы найдемъ для первыхъ 10 Бернулліевыхъ чиселъ слѣдующія величины:

$$\left.\begin{aligned}&B_1=\frac{1}{6};\quad B_3=\frac{1}{30}:\quad B_5=\frac{1}{42};\quad B_7=\frac{1}{30};\\&B_9=\frac{5}{66};\quad B_{11}=\frac{691}{2730};\quad B_{13}=\frac{7}{6};\quad B_{15}=\frac{3617}{510};\\&B_{17}=\frac{43867}{798};\quad B_{19}=\frac{1222277}{2310},\ldots\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Эти числа подъ конецъ всё возрастаютъ безпредѣльно, какъ то мы увидимъ въ слѣдующемъ §.

126. Если въ (1) предыдущаго § положить:

$$x=2\theta i,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, и затѣмъ обѣ части раздѣлить на θ, то мы получимъ:

$$(1)\qquad \operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{B_1}{2!}2^2\theta-\frac{B_3}{4!}2^4\theta^3-\ldots-\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}2^{2k}\theta^{2k-1}-\ldots;$$

съ другой стороны, извѣстно, что

$$(2)\qquad \sin\theta=\theta\prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{(k\pi)^2}\right);$$

взявъ логариѳмическую производную, будемъ имѣть:

$$(3)\qquad \operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\theta}-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\theta}{(k\pi)^2}\left(1-\frac{\theta^2}{(k\pi)^2}\right)^{-1};$$

разлагая въ рядъ и располагая по степенямъ θ, получимъ:

$$(4)\qquad \operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\theta}-\frac{2\theta}{\pi^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{2\theta^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}-\ldots-\frac{2\theta^{2l-1}}{\pi^{2l}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2l}}-\ldots;$$

сравнивая это разложенiе съ (1), получимъ рядъ равенствъ, откуда найдемъ:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1&=2\cdot\frac{2!}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2};\\ B_3&=2\cdot\frac{4!}{(2\pi)^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B_{2l-1}&=2\cdot\frac{(2l)!}{(2\pi)^{2l}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2l}};\end{aligned}\right.$$

и т. д.

Изъ этихъ формулъ видно, что B_{2l-1} съ возрастанiемъ l до ∞ тоже будетъ расти до ∞, ибо во множителѣ его $\frac{(2l)!}{(2\pi)^{2l}}$ съ увеличенiемъ l на единицу въ знаменателѣ прибавляется все тотъ же множитель $(2\pi)^2$, а въ числителѣ безконечно возрастающiй вмѣстѣ съ l множитель $(2l+1)(2l+2)$. Но отношенiе

$$\frac{B_{2l-1}}{(2l)!}$$

стремится съ увеличеніемъ l до ∞, какъ то видно изъ (5), къ l-ому члену геометрической прогрессіи, знаменатель отношенія которой есть $\frac{1}{(2\pi)^2}$, а первый членъ 2. Этимъ объясняется сходимость ряда (2) § 124 для значеній x, модуль которыхъ меньше 2π.

127. Для чиселъ Бернулли имѣются легко запоминаемыя символическія формулы. Эти формулы легко получаются при помощи формулы для коэффиціента при x^n въ разложеніи по степенямъ x функціи $\varphi(e^x)$, гдѣ $\varphi(z)$ обозначаетъ функцію, разлагающуюся въ рядъ по строкѣ Тейлора. Формула эта дана Гершелемъ и выводится такимъ образомъ. Мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(e^x)=\varphi(1+e^x-1)=\varphi(1)+\varphi'(1)(e^x-1)+\\&+\frac{\varphi''(1)}{1.2}(e^x-1)^2+\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(1)}{m!}(e^x-1)^m+\ldots;\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

но

$$\left.\begin{aligned}&(e^x-1)^m=e^{mx}-C_1^m e^{(m-1)x}+C_2^m e^{(m-2)x}-\ldots+\\&+(-1)^k C_k^m e^{(m-k)x}+\ldots+(-1)^m;\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

разлагая входящія сюда показательныя функціи въ рядъ по степенямъ x, мы получимъ для коэффиціента A_n при x^n во (2) такое выраженіе:

$$A_n=\frac{1}{n!}\left\{m^n-C_1^m(m-1)^n+C_2^m(m-2)^n-\ldots+(-1)^m 0^n\right\};\tag{3}$$

выраженіе же въ скобкахъ { } по формулѣ (3) § 30 есть ничто иное какъ $\Delta^m 0^n$, слѣдовательно

$$A_n=\frac{\Delta^m 0^n}{n!}.\tag{3}$$

На основаніи этой формулы коэффиціентъ при x^n въ (1) будетъ:

$$\frac{1}{n!}\left\{\varphi(1)0^n+\varphi'(1)\Delta 0^n+\frac{\varphi''(1)}{1.2}\Delta^2 0^n+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(1)}{n!}\Delta^n 0^n\right\}.\tag{5}$$

Такъ какъ $\Delta^{n+g}0^n=0$, то этотъ рядъ можетъ быть продолженъ до безконечности, и тогда коэффиціентъ при x^n въ (1) символически такъ представится:

$$\frac{\varphi(1+\Delta)0^n}{n!};\tag{6}$$

разлагая $\varphi(1+\Delta)$ въ рядъ по степенямъ Δ (какъ будто это было бы количество) по строкѣ Тейлора, принимая затѣмъ $\Delta^k.0^n$ за $\Delta^k 0^n$, т. е.

за Бринклеево число, мы получимъ формулу (5). Имѣя это въ виду, разложеніе $\varphi(e^x)$ по степенямъ x можемъ такъ представить:

$$(7)\qquad \varphi(e^x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi(1+\triangle)\cdot 0^n}{n!}\,x^n;$$

это и есть формула Гершеля.

128. Вводя Бернулліевы числа въ формулу (2) § 124, мы будемъ имѣть:

$$(1)\qquad \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\ldots;$$

первую часть здѣсь можно такъ представить:

$$(2)\qquad \frac{x}{e^x-1}=\frac{\log(e^x)}{e^x-1},$$

ибо $x=\log(e^x)$; а потому коэффиціентъ при x^{2k} по формулѣ (6) предыдущаго § такъ представится:

$$(3)\qquad \frac{\dfrac{\log(1+\triangle)}{\triangle}0^{2k}}{(2k)!};$$

сравнивая это съ коэффиціентомъ при x^{2k} въ (1), найдемъ

$$(4)\qquad B_{2k-1}=(-1)^{k+1}\frac{\log(1+\triangle)}{\triangle}0^{2k}.$$

Раскрывая эту формулу, помня что $\triangle^m 0^{2k}=0$ при $m>2k$, мы получимъ:

$$(5)\qquad B_{2k-1}=(-1)^{k+1}\left\{\frac{\triangle^{2k}0^{2k}}{2k+1}-\frac{\triangle^{2k-1}0^{2k}}{2k}+\ldots+\frac{\triangle^2 0^{2k}}{3}-\frac{\triangle 0^{2k}}{2}\right\}.$$

Эту формулу можно получить, примѣняя къ $\varphi(x,2k+1)$ формулу:

$$(6)\qquad u'_x=\triangle u_x-\frac{\triangle^2 u_x}{2}+\frac{\triangle^3 u_x}{3}-\frac{\triangle^4 u_x}{4}+\ldots,$$

[которую читатель можетъ вывести по формулѣ (5) § 46], и положивъ затѣмъ $x=0$ *). Дѣйствительно, можно показать, что

$$(7)\qquad \triangle\varphi(x,m)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!},$$

*) *Имшенецкій.* О функціяхъ Бернулли. Казань, 1870. Стр. 21.

когда x получаетъ приращеніе $h=1$; въ самомъ дѣлѣ

$$\Delta\varphi(x,m)=\varphi(x+1,m)-\varphi(x,m)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\frac{\varphi^{(\lambda)}(1,m)-\varphi^{(\lambda)}(0,m)}{1.2.3\ldots\lambda}x^{\lambda}$$

—разлагая по строкѣ Тэйлора; но по (1) и (2) § 118, и по (1) и (2) § 123, всѣ члены за исключеніемъ послѣдняго обратятся въ нуль; а тогда и будемъ имѣть (7), ибо по (1) и (9) § 118:

$$\varphi^{(m-1)}(1,m)-\varphi^{(m-1)}(0,m)=1.$$

Отсюда же [т. е. изъ (7),] будетъ слѣдовать:

$$\Delta^{g}\varphi(x,m)=\frac{\Delta^{g-1}x^{m-1}}{(m-1)!}; \tag{8}$$

съ другой же стороны по (2) § 123

$$\varphi'(0,2k+1)=A_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}.$$

129 129. Можно получить при помощи той же формулы (6) § 127 и другую символическую формулу для числа B_{2k-1}. Мы имѣемъ:

$$\frac{x}{e^{x}-1}-\frac{x}{e^{x}+1}=\frac{2x}{e^{2x}-1};$$

отсюда

$$\frac{x}{e^{x}+1}=\frac{x}{e^{x}-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1};$$

разлагая оба члена второй части въ рядъ по формулѣ (1) предыдущаго § и соединяя въ одинъ сходственные члены, мы будемъ имѣть по сокращеніи обѣихъ частей на x:

$$\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{1}{2}-\frac{B_1(2^2-1)}{2!}x+\frac{B_3(2^4-1)}{4!}x^3-\ldots+(-1)^{k}\frac{B_{2k-1}(2^{2k}-1)}{(2k)}x^{2k-1}-\ldots$$

Слѣдовательно по формулѣ (6) § 127 будетъ выраженіе

$$(-1)^{k}\frac{B_{2k-1}(2^{2k}-1)}{(2k)!}=\frac{1}{(2k-1)!}\cdot\frac{1}{2+\Delta}0^{2k-1}, \tag{2}$$

какъ коэффиціентъ при x^{2k-1} въ разложеніи функціи $\dfrac{1}{e^{x}+1}$; отсюда же найдемъ

$$B_{2k-1}=(-1)^{k}\frac{2k}{2^{2k}-1}\cdot\frac{1}{2+\Delta}0^{2k-1}. \tag{3}$$

Разлагая здѣсь $\frac{1}{2+\triangle}$ въ рядъ по степенямъ $\triangle$, и принимая $\triangle^p.0^{2k-1}$ за $\triangle^p 0^{2k-1}$, мы и получимъ выраженіе Бернулліева числа чрезъ Бриклеевы числа. На основаніи выше сдѣланнаго замѣчанія въ этой формулѣ, подобно какъ и въ формулѣ (4) предыдущаго §, число членовъ будетъ конечное.

130. Ознакомившись со свойствами Бернулліевой функціи и съ различными способами вычисленія Бернулліевыхъ чиселъ, намъ остается ввести ихъ вмѣсто коэффиціентовъ A въ эти функціи; но мы это предоставляемъ сдѣлать читателю; а теперь возвращаемся къ формулѣ (2) § 117. Принимая тамъ $m=2p$, вводя туда вмѣсто A_1 его значеніе $-\frac{1}{2}$, вмѣсто прочихъ коэффиціентовъ ихъ выраженія чрезъ Бернулліевы числа и перенося остаточный членъ въ первую часть, мы будемъ имѣть:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} hu'_x = {} & \triangle u_x - \frac{1}{2} h\triangle u'_x + \frac{B_1}{2!} h^2 \triangle u''_x - \frac{B_3}{4!} h^4 \triangle u_x^{(\text{IV})} + \ldots + \\ & + \frac{(-1)^{k+1} B_{2k-1}}{(2k)!} h^{2k} \triangle u_x^{(2k)} + \ldots + \frac{(-1)^p B_{2p-3}}{(2p-2)!} h^{2p-2} \triangle u_x^{(2p-2)} + \\ & + R_{2p}, \end{aligned}\right.$$

гдѣ

$$(2)\qquad R_{2p} = -h^{2p+1}\int_0^1 \varphi(z, 2p) u_{x+h-hz}^{(2p+1)}\, dz.$$

Этотъ остатокъ допускаетъ еще одно маленькое упрощеніе. Перемѣняя z на $1-z$, мы получимъ отсюда на основаніи (5) § 120:

$$(3)\qquad R_{2p} = -h^{2p+1}\int_0^1 \varphi(z, 2p) u_{x+hz}^{(2p+1)}\, dz.$$

Теперь, функція

$$\varphi(z, 2p)$$

не мѣняетъ своего знака между предѣлами интеграла (§ 123); потому на основаніи хорошо извѣстнаго предложенія интегральнаго исчисленія будетъ

$$(4)\qquad \int_0^1 \varphi(z, 2p) u_{x+hz}^{(2p+1)}\, dz = u_{x+\theta h}^{(2p+1)} \int_0^1 \varphi(z, 2p)\, dz;$$

гдѣ θ правильная положительная дробь:

$$0 < \theta < 1\,; \tag{5}$$

но по (7) § 121

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z\,,2p)\,dz = -\frac{1}{2}A_{2p}\,; \tag{6}$$

а по (5) § 120 $\varphi(1-z,2p)=\varphi(z,2p)$; поэтому

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi(z\,,2p)\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z\,,2p)\,dz\,, \tag{7}$$

и слѣдовательно

$$\int_0^1 \varphi(z\,,2p)\,dz = -A_{2p} = (-1)^p \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} \tag{8}$$

—по (8) § 124. Внося это въ (4) и оттуда въ (3), будемъ имѣть:

$$R_{2p} = (-1)^{p+1} \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p+1} u_{x+\theta h}^{(2p+1)}\,. \tag{9}$$

Эта формула предполагаетъ, что $u_x^{(2p+1)}$ остается конечною, однозначною и непрерывною въ предѣлахъ интеграла, какъ то слѣдуетъ изъ доказательства предложенія интегральнаго исчисленія, на основаніи котораго мы написали равенство (4).

31 131. Шлёмильхъ даетъ еще другую формулу остаточнаго члена, которая заключаетъ въ себѣ производную $2p$-го порядка, слѣдовательно на единицу нисшаго, чѣмъ въ предыдущей формулѣ. По (3) § 121:

$$\varphi'(z\,,2p) = \varphi(z\,,2p-1)\,; \tag{1}$$

интегрируя по частямъ интегралъ, входящій въ (3) предыдущаго §, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(z\,,2p)\,u_{x+hz}^{(2p+1)}\,dz &= \left(\frac{1}{h}\varphi(z\,,2p)\,u_{x+hz}^{(2p)}\right)_0^1 - \frac{1}{h}\int_0^1 \varphi'(z\,,2p)\,u_{x+hz}^{(2p)}\,dz = \\ &= -\frac{1}{h}\int_0^1 \varphi(z,2p-1)\,u_{x+hz}^{(2p)}\,dz\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

но

$$(3) \quad \int_0^1 \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz;$$

или, перемѣняя z на $1-z$ въ послѣднемъ интегралѣ, и имѣя въ виду, что по (6) § 120:

$$(4) \qquad \varphi(1-z, 2p-1) = -\varphi(z, 2p-1),$$

слѣдующее:

$$(5) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p-1) \left(u_{x+hz}^{(2p)} - u_{x+h-hz}^{(2p)} \right) dz;$$

предполагая, что $u_{x+hz}^{(2p)}$ непрерывна между 0 и 1, на основаніи того же предложенія интегральнаго исчисленія, [ибо $\varphi(z, 2p-1)$ не мѣняетъ знака между 0 и $\frac{1}{2}$ по § 122], будемъ имѣть отсюда:

$$(6) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz = \left(u_{x+\theta h}^{(2p)} - u_{x+h-\theta h}^{(2p)} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p-1) dz,$$

или, полагая $1-\theta = \vartheta$:

$$(7) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2p-1) u_{x+hz}^{(2p)} dz = \left(u_{x+\theta h}^{(2p)} - u_{x+\vartheta h}^{2p} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p-1) dz.$$

Но по (13) § 122 и (8) § 124 имѣемъ:

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2p-1) dz = (-1)^p \frac{2^{2p}-1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{B_{2p-1}}{(2p)!};$$

внося это въ (7), оттуда во (2), и изъ (2) въ (3) § 130, мы получимъ формулу Шлёмильха для остаточнаго члена нашей формулы:

$$(9) \qquad R_{2p} = (-1)^{p+1} h^{2p} \frac{2^{2p}-1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} \left[u_{x+\theta h}^{(2p)} - u_{x+\vartheta h}^{(2p)} \right].$$

Въ нѣкоторыхъ особыхъ случаяхъ эта формула допускаетъ упрощенія. Если $u_x^{(2p)}$ или все ростетъ, или все убываетъ отъ $z = x$ до $z = x+h$, сталобыть $u_{(z)}^{2p+1}$ въ этихъ предѣлахъ не мѣняетъ знака,—то такъ какъ

$$0 < \theta < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} < \vartheta < 1,$$

будетъ

$$\left| u_{x+\theta h}^{(2p)} - u_{x+\vartheta h}^{(2p)} \right| < \left| u_{x+h}^{(2p)} - u_x^{(2p)} \right|,$$

и слѣдовательно можно положить:

$$u_{x+\vartheta h}^{(2p)} - u_{x+\theta h}^{(2p)} = \beta \Delta u_x^{(2p)}, \tag{10}$$

гдѣ $0 < \beta < 1$. Внося это въ (9) и полагая

$$\frac{2^{2p}-1}{2^{2p-1}} \beta = 2\varepsilon, \tag{11}$$

гдѣ ε будетъ правильная положительная дробь, какъ произведеніе β на $\dfrac{2^{2p-1} - \frac{1}{2}}{2^{2p-1}} = 1 - \dfrac{1}{2^{2p}}$, мы обратимъ формулу (9) въ такую:

$$R_{2p} = (-1)^{p+1}\, 2\varepsilon \frac{B_{2p-1} h^{2p}}{(2p)!} \Delta u_x^{(2p)}, \tag{12}$$

что одного вида съ послѣднимъ (предъ остаткомъ) членомъ формулы (1) пред. §, если не считать множителя 2ε. Связь между R_{2p+2} и R_{2p} очевидно такая:

$$(-1)^{p+1} \frac{B_{2p-1} h^{2p}}{(2p)!} \Delta u_x^{(2p)} + R_{2p+2} = R_{2p}; \tag{13}$$

внося сюда предыдущее, получимъ:

$$R_{2p+2} = (-1)^{p+1} \varrho \frac{B_{2p-1} h^{2p}}{(2p)!} \Delta u_x^{(2p)}, \tag{14}$$

гдѣ положено

$$2\varepsilon - 1 = \varrho; \tag{15}$$

такъ какъ ε лежитъ между 0 и 1, то ϱ лежитъ между -1 и $+1$:

$$-1 < \varrho < +1. \tag{16}$$

Формула (14) говоритъ, что остатокъ составляетъ часть послѣдняго удерживаемаго члена, если имѣютъ мѣсто предположенія, при которыхъ была получена формула (12), т. е., что $u_x^{(2p)}$ непрерывна между x и $x+h$, а $u_x^{(2p+1)}$, т. е. производная нечетнаго порядка, въ тѣхъ же предѣлахъ зна-

ченій независимой перемѣнной не мѣняетъ своего знака. Сравнивая форму R_{2p+2}, составленную по (9) § 130 съ только что найденной, получимъ по сокращеніи:

$$(17)\qquad \frac{B_{2p+1}h^3}{(2p+1)(2p+2)}u_{x+\vartheta h}^{2p+3} = -\varrho B_{2p-1}\Delta u_x^{(2p)},$$

или [такъ какъ

$$\Delta u_x^{(2p)} = h\int_0^1 u_{x+ht}^{(2p+1)}dt,$$

какъ легко видѣть]:

$$(18)\qquad \frac{B_{2p+1}h^2}{(2p+1)(2p+2)}u_{x+\vartheta h}^{2p+3} = -\varrho B_{2p-1}\int_0^1 u_{x+ht}^{(2p+1)}dt.$$

Но производныя $u_x^{(2p+1)}$ и $u_x^{(2p+3)}$ не мѣняютъ знака между x и $x+h$ по предположенію, какъ производныя нечетнаго порядка, слѣдовательно и между x и $x+\vartheta h$; а потому, если для промежутка x и $x+h$ двѣ рядомъ стоящія производныя нечетнаго порядка имѣютъ одинаковые знаки, то отсюда слѣдуетъ, что ϱ должно быть <0; въ противномъ случаѣ, т. е. когда для разсматриваемаго промежутка они имѣютъ противные знаки, то $\varrho>0$. Въ частномъ случаѣ, когда

$$u_x = e^x,$$

производныя $u_x^{(2p+1)}$ и $u_x^{(2p+3)}$, будучи равны e^x, не мѣняютъ знака, именно остаются обѣ положительными; оттого въ этомъ случаѣ ϱ отрицательная величина; полагая

$$\varrho = -\lambda,$$

гдѣ λ положительная правильная дробь, мы будемъ имѣть для разсматриваемой теперь функціи:

$$(19)\qquad R_{2p+2} = (-1)^p\lambda\frac{B_{2p-1}h^{2p}}{(2p)!}\left(e^{x+h}-e^x\right).$$

Перемѣнивъ въ формулѣ (1) § 130 p на $p+1$, и положивъ $u_x=e^x$, мы получимъ, внося только что полученное выраженіе остатка, по раздѣленіи обѣихъ частей на $e^{x+h}-e^x$ и сокращеніи лѣвой на e^x такой результатъ, который намъ понадобится въ послѣдствіи:

$$\frac{h}{e^h-1}=1-\frac{1}{2}h+\frac{B_1}{2!}h^2-\frac{B_3}{4!}h^4+\ldots+(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}+(-1)^p\frac{\lambda B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p} \quad (20)$$

32. 132. Вернемся теперь къ формулѣ (1) § 130 и положимъ тамъ:

$$u_x=\int_{x_0}^{x}v_x dx\,; \quad (1)$$

тогда будетъ:

$$u'_x=v_x\,;\quad u''_x=v'_x\,;\quad \ldots u_x^{(2k)}=v_x^{(2k-1)}\,;\quad u_x^{(2k+1)}=v_x^{(2k)}\,; \quad (2)$$

$$\Delta u_x=\int_{x_0}^{x+h}v_x dx-\int_{x_0}^{x}v_x dx=\int_{x}^{x+h}v_x dx\,, \quad (3)$$

и упомянутая формула обратится въ такую:

$$\left.\begin{aligned} hv_x=\int_x^{x+h}v_x dx-\frac{1}{2}h\Delta v_x+\frac{B_1}{2!}h^2\Delta v'_x-\frac{B_3}{4!}h^4\Delta v''_x+\ldots+\\ +(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}h^{2k}\Delta v_x^{(2k-1)}+\ldots+(-1)^p\frac{B_{2p-3}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\Delta v_x^{(2p-3)}+\\ +R_{2p}\,, \end{aligned}\right\} (4)$$

гдѣ

$$R_{2p}=-h^{2p+1}\int_0^1\varphi(z,2p)v_{x+h-hz}^{(2p)}dz\,. \quad (5)$$

Просуммируемъ равенство (4) между предѣлами x_0 и X; будемъ имѣть (дѣля еще на h):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{x=x_0}^{x=X}v_x=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{X}v_x dx^{*)}-\frac{1}{2}\left(v_X-v_{x_0}\right)+\frac{B_1}{2!}h\left(v'_X-v'_{x_0}\right)-\\ -\frac{B_3}{4!}h^3\left(v'''_X-v'''_{x_0}\right)+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}h^{2k-1}\left(v_X^{(2k-1)}-v_{x_0}^{(2k-1)}\right)+\\ +\ldots+(-1)^p\frac{B_{2p-3}}{(2p-2)!}h^{2p-3}\left(v_X^{(2p-3)}-v_{x_0}^{(2p-3)}\right)+R_{2p}\,, \end{aligned}\right\} (6)$$

---

*) ибо $\sum_{x=x_0}^{x=X}\int_x^{x+h}v_x dx=\int_{x_0}^{x_0+h}v_x dx+\int_{x_0+h}^{x_0+2h}v_x dx+\ldots+\int_{x_0+\overline{n-1}h}^{X}v_x dx=\int_{x_0}^{X}v_x dx$

если $X-x_0=nh$.

гдѣ уже

$$(7)\qquad R_{2p} = -h^{2p}\int_0^1 \varphi(z,2p)\sum_{x=x_0}^{x=X} v^{(2p)}_{x+h-hz}\,dz.$$

Это и есть формула Маклореня. Если удастся найти два независящія отъ z количества M и N такія, что

$$(8)\qquad M < \sum_{x=x_0}^{x=X} v^{(2p)}_{x+h-hz} < N,$$

то помножая эти неравенства на немѣняющую (по § 123) свой знакъ функцію $(-1)^p\varphi(z,2p)$ и интегрируя отъ 0 до 1, мы по (8) § 130 будемъ имѣть:

$$(9)\qquad M\frac{B_{2p-1}}{(2p)!} < (-1)^p\int_0^1 \varphi(z,2p)\sum_{x=x_0}^{x=X} v^{2p}_{x+h-hz}dz < N\frac{B_{2p-1}}{(2p)!};$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(10)\qquad (-1)^p\int_0^1 \varphi(z,2p)\sum_{x=x_0}^{x=X} v^{(2p)}_{x+h-hz}dz = \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}\Big(M+\vartheta(N-M)\Big),$$

гдѣ ϑ обозначаетъ правильную положительную дробь: $0<\vartheta<1$. Беря отсюда значеніе интеграла и внося въ (7), получимъ для остатка Маклоренева ряда такую формулу:

$$(11)\qquad R_{2p} = (-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\Big(M+\vartheta(N-M)\Big).$$

Если $v^{(2p)}_x$ непрерывна на всемъ промежуткѣ значеній x отъ x_0 до X, то въ формулѣ (1) § 130 мы могли бы принять для остатка формулу (9) § 130 и тогда получили бы для остаточнаго члена формулы (6) настоящаго § такую формулу:

$$(12)\qquad R_{2p} = (-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p}\sum_{x=x_0}^{x=X} v^{(2p)}_{x+\vartheta h};$$

средняя ариѳметическая членовъ этой суммы, заключаясь между наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній функціи v^{2p}_x въ этомъ промежуткѣ, будетъ представлять значеніе возможное для v^{2p}_x и будетъ от-

вѣчать нѣкоторому среднему значенію x, пусть $x_0+\theta(X-x_0)$; такъ что будетъ

$$\frac{1}{n}\sum_{x=x_0}^{x=X} v_{x+\vartheta h}^{(2p)} = v_{x_0+\theta(X-x_0)}^{(2p)}\,; \tag{13}$$

откуда, имѣя въ виду что $n=\dfrac{X-x}{h}$, получимъ:

$$\sum_{x=x_0}^{x=X} v_{x+\vartheta h}^{(2p)} = \frac{(X-x_0)}{h}\, v_{x_0+\theta(X-x_0)}^{(2p)}\,; \tag{14}$$

внося это въ (12), получимъ такую формулу для остаточнаго члена:

$$R_{2p}=(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p-1}(X-x_0)v_{x_0+\theta(X-x_0)}^{(2p)}\,. \tag{15}$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда $v_x^{(2p+2)}$ и $v_x^{(2p)}$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ x_0 и X значеній x, въ формулѣ (1) § 130 можно остаточному члену дать видъ (14) § 131. Тогда для остаточнаго члена формулы (6) настоящаго § получимъ такую формулу:

$$R_{2p}=(-1)^{p}\frac{B_{2p-3}h^{2p-3}}{(2p-2)!}\sum_{x=x_0}^{x=X}\varrho\Delta v_x^{(2p-3)}, \tag{16}$$

гдѣ ϱ правильная дробь, различная для различныхъ значеній x, но сохраняющая свой знакъ. Въ этомъ случаѣ очевидно изъ неравенства

$$\varrho\Delta v_x^{(2p-3)} \lessgtr \Delta v_x^{(2p-3)}$$

слѣдуетъ такое:

$$\sum_{x=x_0}^{x=X}\varrho\Delta v_x^{(2p-3)} \lessgtr \sum_{x=x_0}^{x=X}\Delta v_x^{(2p-3)} = v_X^{(2p-3)} - v_{x_0}^{(2p-3)}, \tag{17}$$

а потому можно положить:

$$\sum_{x=x_0}^{x=X}\varrho\Delta v_x^{(2p-3)} = \theta\left(v_X^{(2p-3)} - v_{x_0}^{(2p-3)}\right), \tag{18}$$

гдѣ $0<\theta<1$. Внося это въ (16), получимъ такую формулу для остатка формулы Маклореня (6):

$$(19) \qquad R_{2p} = (-1)^p \theta \frac{B_{2p-3} h^{2p-3}}{(2p-2)!}\left(v_X^{(2p-3)} - v_{x_0}^{(2p-3)}\right).$$

Отсюда видно, что погрѣшность будетъ меньше, по своей абсолютной величинѣ, послѣдняго удерживаемаго члена.

133. Изъ формулы (6) § 132, перемѣняя тамъ p на $p+1$ и вводя остаточный членъ по формулѣ (19) того-же §, мы получимъ такую:

$$(1) \begin{cases} \sum_{x_0}^{X} v_x = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{X} v_x dx - \frac{1}{2}\left(v_X - v_{x_0}\right) + \frac{B_1}{1.2} h \left(v'_X - v'_{x_0}\right) - \\ - \frac{B_3}{4!} h^3 \left(v'''_X - v'''_{x_0}\right) + \ldots + (-1)^{p+1} \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p-1} \left(v_X^{(2p-1)} - v_{x_0}^{(2p-1)}\right) + \\ + (-1)^{p+1} \theta \frac{B_{2p-1} h^{2p-1}}{(2p)!} \left(v_X^{2p-1} - v_{x_0}^{2p-1}\right). \end{cases}$$

Положивъ здѣсь:

$$(2) \qquad v_x = e^{\alpha x},$$

мы будемъ имѣть:

$$(3) \begin{cases} \int v_x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C; \quad v_x^{(m)} = \alpha^m e^{\alpha x}; \\ \sum e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha h} - 1} + C_1; \end{cases}$$

а потому, по раздѣленіи обѣихъ частей на общаго множителя ихъ $e^{\alpha X} - e^{\alpha x_0}$, мы получимъ:

$$(4) \begin{cases} \frac{1}{e^{\alpha h} - 1} = \frac{1}{\alpha h} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1.2} h\alpha - \frac{B_3}{4!} h^3 \alpha^3 + \ldots + \\ + (-1)^{p+1} \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p-1} \alpha^{2p-1} + (-1)^{p+1} \theta \frac{B_{2p-1}}{(2p)!} h^{2p-1} \alpha^{2p-1}. \end{cases}$$

Перемѣняя здѣсь количественный символъ α на операціонный $\frac{d}{dx}$, помножая на v_x и принимая

$$(5) \qquad \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \int; \quad \frac{d^k}{dx^k} \cdot v_x = v_x^{(k)},$$

мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}}-1}v_x=\frac{1}{h}\int v_x dx-\frac{1}{2}v_x+\frac{B_1}{1.2}hv'_x-\frac{B_3}{4!}h^3v'''_x+\ldots+\\ +(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p-1}v_x^{(2p-1)}+(-1)^{p+1}\theta\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}h^{2p-1}v_x^{(2p-1)};\end{aligned}\right\}(6)$$

здѣсь вторая часть тождественна будетъ со второю частью (1), если тамъ перемѣнить X на x, а члены зависящіе отъ x_0, вмѣстѣ взятые, обозначить чрезъ C и перенести налѣво; отсюда заключаемъ, что

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}v_x=\sum_{x_0}^{x}v_x+C. \qquad (7)$$

Такова символическая формула выражающая соотношеніе между суммою и интеграломъ; при помощи ея можно вычислить сколько угодно членовъ формулы Маклореня [(6) § 132]; остаточный членъ при этомъ получится однако въ формѣ пригодной только въ случаѣ, когда примѣнима форма (20) [предыдущаго §] остаточнаго члена.

134. Примѣнимъ формулу Маклореня къ вычисленію суммъ положительныхъ степеней ряда натуральныхъ чиселъ отъ 0 до какого либо числа x. Здѣсь будетъ $h=1, v_x=x^n$, и сумма будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x_0}^{x}x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{2}x^n+\frac{B_1}{2!}nx^{n-1}-\frac{B_3}{4!}n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\\ +\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+2)x^{n-2k+1}+\ldots+C;\end{aligned}\right\}(1)$$

гдѣ чрезъ C обозначено все зависящее отъ x_0. Число членовъ здѣсь будетъ конечное, ибо цѣлая положительная степень x имѣетъ конечное число производныхъ; послѣдній членъ (предъ C) будетъ въ случаѣ n четнаго, т. е. $n=2p$

$$(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}2p(2p-1)\ldots3.2.x=(-1)^{p+1}B_{2p-1}x; \qquad (2)$$

въ случаѣ же n нечетнаго: $n=2p-1$, такой:

$$(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}(2p-1)\ldots3.2.1=(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-1}}{2p}. \qquad (3)$$

Предлагаемъ сличить эту формулу съ формулою (4) § 98; тамъ вторая часть разложена по факторіэлямъ, здѣсь по степенямъ; такъ какъ одно сводится на другое, то и обѣ формулы, о которыхъ идетъ рѣчь,

Формулы ... см. ... курс исчисления конечных разностей стр. 72–75.

могутъ быть выведены одна изъ другой. Мы ограничимся здѣсь лишь разсмотрѣніемъ частныхъ случаевъ $n=1, 2, 3$. Для $n=1$ будемъ имѣть по (1):

$$\sum_{x_0}^{x} x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1.2} + C; \tag{4}$$

относя $\frac{B_1}{1.2}$, какъ независящій отъ x членъ въ C, будемъ имѣть:

$$\sum_{x_0}^{x} x = \frac{x(x-1)}{1.2} + C. \tag{5}$$

Пусть $x_0=0$; тогда $C=0$; если теперь $x=N+1$, то будемъ имѣть

$$\sum_{0}^{N+1} x = \frac{(N+1)N}{1.2}. \tag{6}$$

Точно также будетъ по формулѣ (1):

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{x_0}^{x} x^2 &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{B_1}{2!}2x + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + C = \\ &= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} + C; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

принимая $x_0=0$, получимъ $C=0$; полагая $x=N+1$, будемъ имѣть:

$$\sum_{0}^{N+1} x^2 = \frac{(N+1)N(2N+1)}{1.2.3}. \tag{8}$$

Если $n=3$, то по формулѣ (1) получимъ:

$$\sum_{x_0}^{x} x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{B_1}{2!}3x^2 - \frac{B_3}{4!}3.2.1 + C; \tag{9}$$

внося вмѣсто B_1 его значеніе $\frac{1}{6}$ и относя четвертый членъ, какъ независящій отъ x, въ C, будемъ имѣть:

$$\sum_{x_0}^{x} x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + C = \left(\frac{x(x-1)}{1.2}\right)^2 + C; \tag{10}$$

полагая $x_0 = 0$, найдемъ $C = 0$; полагая $x = N + 1$, получимъ

$$\sum_{0}^{N+1} x^3 = \left(\frac{(N+1)N}{1.2}\right)^2. \tag{11}$$

Результаты (6), (8) и (11) тождественны съ полученными нами въ §§ 99 и 100.

135. Выраженіе, стоящее направо въ равенствѣ (1) предыдущаго §, представляетъ произведеніе $\varphi(x, n+1)$ на $n!$, сложенное съ C, т. е.

$$\sum_{x_0}^{x} x^n = n!\varphi(x, n+1) + C. \tag{1}$$

Другіе авторы именно первый членъ второй части этой формулы и называютъ Бернулліевой функціей (Schlömilch, Бертранъ). Дифференцируя функцію:

$$\frac{e^{kx}-1}{e^x-1} = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(k-1)x}, \tag{2}$$

p разъ и полагая $x = 0$, мы будемъ имѣть:

$$D^{(p)}\left(\frac{e^{kx}-1}{e^x-1}\right)_{x=0} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (k-1)^p = \sum_{0}^{k} x^p; \tag{3}$$

но по (1)

$$\sum_{0}^{k} x^p = p!\,\varphi(k, p+1), \tag{4}$$

гдѣ $C = 0$, ибо въ (1) при $x = 0$ будутъ и лѣвая часть и правая равны нулю, ибо $\varphi(0, p+1) = 0$, какъ мы уже знаемъ (§ 118); слѣдовательно

$$\varphi(k, p+1) = \frac{1}{p!} D^{(p)}\left(\frac{e^{kx}-1}{e^x-1}\right)_{x=0}. \tag{5}$$

Такъ опредѣляется $\varphi(k, p+1)$ для цѣлыхъ аргументовъ. Изъ этого опредѣленія могутъ быть выведены всѣ свойства Бернулліевыхъ функцій, какъ то читатель найдетъ у Шлёмильха и Бертрана; но только этотъ

способъ не представляется намъ натуральнымъ, ибо Бернулліева функція есть алгебраическая функція, именно полиномъ.

136. Для другого примѣненія формулы Маклореня выведемъ изъ нея формулу *Стирлинга* для приближеннаго вычисленія произведенія

$$1.2.3\ldots x. \tag{1}$$

Если возьмемъ log отъ этого произведенія, то будемъ имѣть:

$$\log(1.2.3\ldots x)=\sum_{1}^{x}\log x+\log x, \tag{2}$$

[ибо послѣднее слагаемое въ суммѣ есть $\log(x-1)$;] входящую сюда сумму мы можемъ вычислить по формулѣ Маклореня (6) § 132. Съ этой цѣлью положимъ въ ней:

$$v_x=\log x; \tag{3}$$

тогда будетъ

$$\int\log x\,dx=x\log x-x+C; \tag{4}$$

$$v'_x=\frac{1}{x};\quad v^{(2k-1)}=\frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}}; \tag{5}$$

изъ послѣдняго выраженія видно, что производныя нечетныхъ порядковъ (для $x>0$) постоянно положительныя; слѣдовательно условія при которыхъ примѣнима формула (19) § 132 для остаточнаго члена, здѣсь выполнены; и кромѣ того видно, что ϱ въ этой формулѣ будетъ <0, т. е. правильная отрицательная дробь. Внося изъ (3), (4) и (5) въ (6) § 132, придавая $\log x$ къ обѣимъ частямъ, согласно (2) настоящаго §, перемѣняя X на x и собирая члены съ x_0, которое примемъ равнымъ единицѣ: $x_0=1$, въ одинъ, мы будемъ имѣть:

$$\left\{\begin{aligned}&\log(1.2.3\ldots x)=\\&=\sum_{1}^{x}\log x+\log x=\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x+\gamma-x+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x}-\frac{B_3}{3.4}\frac{1}{x^3}+\ldots+\\&+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k-1}}{(2k-1).2k}\cdot\frac{1}{x^{2k-1}}+\ldots+(-1)^{p}\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)}\cdot\frac{1}{x^{2p-3}}+\\&+(-1)^{p}\cdot\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)}\cdot\left(\frac{\theta}{x^{2p-3}}-(\theta-\theta_0)\right).\end{aligned}\right. \tag{6}$$

$1+\frac{1}{2}-\frac{B_1}{1.2}+\frac{B_3}{3.4}-\frac{B_5}{5.6}+\dots=\lg\sqrt{2\pi}$ точно? [illegible]

Здѣсь θ_0 обозначаетъ предѣлъ величины θ при $x=\infty$; это будетъ, какъ и сама θ, величина не бо́льшая единицы и не меньшая нуля; а

$$\gamma=1+\frac{1}{2}-\frac{B_1}{1.2}+\dots+(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)}+(-1)^{p+1}\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)}\theta_0, \quad (7)$$

слѣдовательно отъ x независитъ. Полагая

$$\gamma=\log C, \quad (8)$$

мы получимъ изъ (4), переходя отъ логариѳма къ числу, такую формулу:

$$1.2.3\dots x=Cx^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)}, \quad (9)$$

гдѣ положено для краткости

$$\left.\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_3}{3.4\,x^2}+\dots+(-1)^p\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)x^{2p-4}}+\\+(-1)^p\frac{B_{2p-3}}{(2p-3)(2p-2)}\left[\frac{\theta}{x^{2p-3}}-(\theta-\theta_0)\right]x.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

137 Въ этой формулѣ остается еще опредѣлить постоянное C.

137. Для этого обратимся къ формулѣ Валлиса (Wallis) для числа π, выводимой въ курсахъ интегральнаго исчисленія *):

$$\text{пред.}\left.\frac{2.2.4.4.6.6\dots(2n-2).2n}{1.3.3.5.5.7\dots(2n-1)(2n-1)}\right|_{n=\infty}=\frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Извлекая квадратный корень, получимъ отсюда:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\text{пред.}\left.\frac{2.4.6.8\dots(2n-2)}{1.3.5.7\dots(2n-1)}\sqrt{2n}\right|_{n=\infty}. \quad (2)$$

Если числителя и знаменателя второй части помножить на

$$2.4.6\dots(2n-2),$$

то будемъ имѣть:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\text{пред.}\left.\frac{\left[2.4.6.8\dots(2n-2)\right]^2\sqrt{2n}}{1.2.3.4.5\dots(2n-2)(2n-1)}\right|_{n=\infty}; \quad (3)$$

*) Sturm. Cours d'Analyse. Paris 1880. T. II, p. 9.

что можно еще такъ представить:

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \text{пред.}\ \frac{2^{2(n-1)}\Big(1.2.3\ldots(n-1)\Big)^2\sqrt{2n}}{1.2.3.4.5\ldots(2n-2)(2n-1)}\Bigg|_{n=\infty}$$

или перемѣняя n на $n+1$:

$$(5)\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \text{пред.}\ \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(1.2.3\ldots n)^2(n+1)^{\frac{1}{2}}}{1.2.3.4.5\ldots(2n-1)(2n)(2n+1)}\Bigg|_{n=\infty}.$$

Вотъ въ эту формулу мы и подставимъ вмѣсто $1.2.3\ldots n$ и $1.2.3\ldots(2n+1)$ ихъ выраженія по формулѣ Стирлинга. Полагая въ (7) предыдущаго § $x=n$, и $x=2n+1$, мы будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \begin{cases} 1.2.3\ldots n = C\,n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n+\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right)}; \\ 1.2.3\ldots(2n+1) = C(2n+1)^{2n+1+\frac{1}{2}}\,e^{-2n-1+\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}; \end{cases}$$

вставляя это въ (5), получимъ:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \text{пред.}\ \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}C^2 n^{2n+1} e^{-2n+\frac{2}{n}\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right)}(n+1)^{\frac{1}{2}}}{C.(2n+1)^{2n+1+\frac{1}{2}}\,e^{-2n-1+\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}}\Bigg|_{n=\infty}$$

или сокращая:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = C\,\text{пред.}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\,e^{1+\frac{2}{n}\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}\right\}_{n=\infty};$$

или еще:

$$(7)\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = C\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{пред.}\left\{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n+1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}}\,e^{1+\frac{2}{n}\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}\right\}_{n=\infty};$$

но

$$\text{пред.}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n+1}\Bigg|_{n=\infty} = \frac{1}{\text{пред.}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}}\Bigg|_{n=\infty} = \frac{1}{e};$$

$$\text{пред.}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}}\Bigg|_{n=\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{пред.}\,\frac{2}{n}\varphi\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big|_{n=\infty}=0\,;\quad \text{пред.}\,\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\Big|_{n=\infty}=0\,,$$

какъ то видно изъ (10) предыдущаго §; а потому послѣ подстановки этихъ предѣловъ въ (7) эта формула окончательно приметъ такой видъ:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=C.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

откуда получимъ:

$$C=\sqrt{2\pi}\,. \tag{8}$$

Вносися это въ (9) предыдущаго §, получимъ *формулу Стирлинга*:

$$1.2.3\ldots x=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)}, \tag{9}$$

гдѣ $\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)$ опредѣляется равенствомъ (10) предыдущаго §. Если разложить показательную функцію $e^{\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x, то, ограничиваясь лишь первыми четырьмя членами, получимъ окончательно:

$$1.2.3\ldots x=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\ldots\right)^{*)} \tag{10}$$

На практикѣ, конечно, вычисляютъ логариѳмъ этого произведенія, но въ теоретическихъ вопросахъ эта формула часто употребляется.

138. Разсмотримъ теперь соотношенія между кратными суммами и кратными интегралами. Съ этою цѣлью вернемся къ формулѣ (2) § 117, въ которой перемѣнимъ m на $m+1$ и положимъ

$$u_x=\int_{x_0}^{x}v_x dx\,, \tag{1}$$

а затѣмъ просуммируемъ по x отъ x_0 до какого либо x; принимая во вниманіе (2) и (3) § 132, мы будемъ имѣть тогда такое равенство:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}v_x dx+\gamma+A_1hv_x+A_2h^2v'_x+A_3h^3v''_x+\ldots+A_mh^mv_x^{(m-1)}=\\&=h\sum_{x_0}^{x}v_x+h^{m+2}\int_0^1\varphi(z,m+1)\sum_{x_0}^{x}v^{(m+1)}_{x+h-hz}dz\,,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

*) *Boole*. Treatise of the calculus of finite differences. Third ed. London 1880. p. 94.

гдѣ чрезъ γ обозначена сумма членовъ, зависящихъ только отъ x_0, и потому постоянныхъ. Суммируя это равенство между тѣми же предѣлами, мы получимъ:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} v_x dx+\gamma\frac{x^{(1|h)}}{1.2}+\bar{\gamma}+A_1 h\sum_{x_0}^{x} v_x+A_2 h^2\sum_{x_0}^{x} v'_x+\cdots+A_m h^m\sum_{x_0}^{x} v_x^{(m-1)}=\\ &\qquad =h\sum_{x_0}^{x}{}^{(2)} v_x+h^{m+2}\int_0^1\varphi(z.m+1)\sum_{x_0}^{x}{}^{(2)} v_{x+h-hz}^{(m+1)}dz. \end{aligned}\right.$$

Перемѣняя теперь въ равенствѣ (2) v_x по очереди на $\int_{x_0}^{x} v_x dx$, на v_x, на v'_x, на v''_x и т. д., наконецъ на $v_x^{(m-1)}$, и останавливая каждый разъ на производной $m+1$-го порядка въ остаточномъ членѣ, мы получимъ такой рядъ равенствъ:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}{}^{(2)} v_x dx^2+\gamma_0+A_1 h\int_{x_0}^{x} v_x dx+A_2 h^2 v_x+A_3 h^3 v'_x+\cdots+A_{m+1} h^{m+1} v_x^{(m-1)}=\\ &\qquad =h\sum_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} v_x+h^{m+3}\int_0^1\varphi(z,m+2)\sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)}dz; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} v_x dx+\gamma+A_1 h v_x+A_2 h^2 v'_x+A_3 h^3 v''_x+\cdots+A_m h^m v_x^{(m-1)}=\\ &\qquad =h\sum_{x_0}^{x} v_x+h^{m+2}\int_0^1\varphi(z,m+1)\sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)}dz; \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &v_x+\gamma'+A_1 h v'_x+A_2 h^2 v''_x+A_3 h^3 v'''_x+\cdots+A_{m-1} h^{m-1} v_x^{(m-1)}=\\ &\qquad =h\sum_{x_0}^{x} v'_x+h^{m+1}\int_0^1\varphi(z,m)\sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)}dz; \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &v'_x+\gamma''+A_1 h v''_x+A_2 h^2 v'''_x+A_3 h^3 v_x^{IV}+\cdots+A_{m-2} h^{m-2} v_x^{(m-1)}=\\ &\qquad =h\sum_{x_0}^{x} v''_x+h^{m}\int_0^1\varphi(z,m-1)\sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)}dz; \end{aligned}\right.$$

и т. д.

$$\left.\begin{aligned}&v_x^{(m-2)}+\gamma^{(m-1)}+A_1hv_x^{(m-1)}=\\&=h\sum_{x_0}^{x}v_x^{(m-1)}+h^3\int_0^1\varphi(z,2)\sum_{x_0}^{x}v_{x+h-hz}^{(m+1)}\,dz.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Помножая равенство (3) на h, (4) на 1; (5) на A_1h, (6) на A_2h^2, (7) на A_3h^3 и т. д.; наконецъ послѣднее [(8)] на A_mh^m, и складывая, по сокращеніи получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}{}^{(2)}v_xdx^2+A_1^{(2)}h\int_{x_0}^{x}v_xdx+A_2^{(2)}h^2v_x+A_3^{(2)}h^3v_x'+A_4^{(2)}h^4v_x''+\\&+A_5^{(2)}v_x'''+\ldots+A_{m+1}^{(2)}h^{m+1}v_x^{(m-1)}+\gamma\frac{x^{(1|h)}}{1.h}+\gamma_1=h^2\sum_{x_0}^{x}{}^{(2)}v_x+R_m^{(2)}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

гдѣ положено:

$$\gamma_1=\bar{\gamma}h+\gamma_0+A_1h\gamma+A_2h^2\gamma'+A_3h^3\gamma''+\ldots+A_mh^m\gamma^{(m-1)},\qquad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}&A_1^{(2)}=2A_1;\ A_2^{(2)}=A_1^2+2A_2;\ A_3^{(2)}=2A_1A_2+2A_3;\\&A_4^{(2)}=2A_1A_3+A_2^2+2A_4;\ A_5^{(2)}=2A_2A_3+2A_1A_4+2A_5;\\&A_6^{(2)}=2A_1A_5+2A_2A_4+A_3^2+2A_6;\\&\text{и т. д.; вообще}\\&A_k^{(2)}=2A_1A_{k-1}+2A_2A_{k-2}+2A_3A_{k-3}+\ldots+2A_{\frac{k-1}{2}}A_{\frac{k+1}{2}}+2A_k,\\&\text{когда } k \text{ нечетное и}\\&\qquad\qquad\ldots+A_{\frac{k}{2}}^2+2A_k,\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

когда оно четное, а

$$R_m^{(2)}=h^{m+3}\int_0^1\left\{\varphi(z,m+1)\sum_{x_0}^{x}{}^{(2)}v_{x+h-hz}^{(m+1)}+\varphi_1(z,m+2)\sum_{x_0}^{x}v_{x+h-hz}^{(m+1)}\right\}dz,\qquad(12)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(z,m+2)=\varphi(z,m+2)+A_1\varphi(z,m+1)+\\&+A_2\varphi(z,m)+A_3\varphi(z,m-1)+\ldots+A_m\varphi(z,2).\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Вставляя вмѣсто φ ихъ разложенія по степенямъ z [(3) § 117], легко убѣдиться, что

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi_1(z, m+2) = \dfrac{z^{m+2}}{(m+2)!} + A_1^{(2)} \dfrac{z^{m+1}}{(m+1)!} + A_2^{(2)} \dfrac{z^m}{m!} + \\ \qquad + \ldots + A_{m+1}^{(2)} z + A_{m+2}^{(2)}. \end{cases}$$

Коэффиціенты, входящіе въ (9) и (14), суть коэффиціенты при степеняхъ x отъ 1 до $m+1$ въ разложеніи въ рядъ по восходящимъ степенямъ x функціи:

$$(15)\quad \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^2 = \left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_m x^m + \ldots\right)^2,$$

какъ нетрудно видѣть.

139. 139. Просуммируемъ теперь равенство (9) предыдущаго § отъ x_0 до x; получимъ:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} {}^{(2)} v_x dx^2 + A_1^{(2)} h \sum_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} v_x dx + A_2^{(2)} h^2 \sum_{x_0}^{x} v_x + A_3^{(2)} h^3 \sum_{x_0}^{x} v_x' + \\ \displaystyle\qquad + \ldots + A_{m+1}^{(2)} h^{m+1} \sum_{x_0}^{x} v_x^{(m-1)} + \gamma \frac{x^{(2|h)}}{1.2.h^2} + \gamma_1 \frac{x^{(1|h)}}{1.h} + \gamma_2 = \\ \displaystyle\qquad\qquad = h^2 \sum_{x_0}^{x} {}^{(3)} v_x + \overline{R}_m, \end{cases}$$

гдѣ

$$(2)\quad \overline{R}_m = h^{m+3} \int_0^1 \left\{ \varphi(z, m+1) \sum_{x_0}^{x} {}^{(3)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \varphi_1(z, m+2) \sum_{x_0}^{x} {}^{(2)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} \right\} dz.$$

Изъ (1) надобно исключить, изъ первой части его, всѣ $\sum$. За исключеніемъ перваго члена всѣ $\sum$ можно исключить при помощи уравненій (4)—(8) предыдущаго §. Чтобы исключить сумму, входящую въ первый членъ, перемѣнимъ въ формулѣ (2) того же § v_x на $\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} v_x dx\, dx$; тогда получимъ, останавливаясь опять на $v_x^{(m+1)}$ въ остаточномъ членѣ, такое равенство:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} {}^{(3)} v_x dx^3 + \gamma + A_1 h \int_{x_0}^{x} {}^{(2)} v_x dx^2 + A_2 h^2 \int_{x_0}^{x} v_x dx + A_3 h^3 v_x + \\ \qquad + A_4 h^4 v_x' + \ldots + A_{m+2} h^{m+2} v_x^{(m-1)} = \\ \displaystyle\qquad = h \sum_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} {}^{(2)} v_x dx + h^{m+4} \int_0^1 \varphi(z, m+3) \sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)} dz. \end{cases}$$

Помножая теперь уравненіе (1) на h, уравненіе (3) на 1; уравненіе (4) предыдущаго § на $A_1^{(2)}h$; уравненіе (5) того же § на $A_2^{(2)}h^2$, уравненіе (6) на $A_3^{(2)}h^3$, уравненіе (7) на $A_4^{(2)}h^4$, и т. д.; наконецъ (8) на $A_{m+1}^{(2)}h^{m+1}$ и складывая, послѣ сокращенія получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}{}^{(3)} v_x dx^3 + A_1^{(3)} h \int_{x_0}^{x}{}^{(2)} v_x dx^2 + A_2^{(3)} h^2 \int_{x_0}^{x} v_x dx + A_3^{(3)} h^3 v_x + A_4^{(3)} h^4 v'_x + \\ &+ \dots + A_{m+2}^{(3)} h^{m+2} v_x^{(m+1)} + \gamma \frac{x^{(2|h)}}{1.2.h^2} + \gamma_1 \frac{x^{(1|h)}}{1.h} + \gamma_2 = \\ &= h^3 \sum_{x_0}^{x}{}^{(3)} v_x + R_m^{(3)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ въ γ_2 собрано все независящее отъ x; коэффиціенты лѣвой части равенства суть таковыя при степеняхъ x въ разложеніи функціи

$$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^3 = (1+A_1^{(2)}x+A_2^{(2)}x^2+\dots)(1+A_1x+A_2x^2+\dots), \tag{4}$$

а

$$\left.\begin{aligned} R_m^{(3)} = h^{m+4}\int_0^1 &\left\{\varphi(z,m+1)\sum_{x_0}^{x}{}^{(3)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \varphi_1(z,m+2)\sum_{x_0}^{x}{}^{(2)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \right. \\ &\left. + \varphi_2(z,m+3)\sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)}\right\} dz, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(z,m+3) = \varphi(z,m+3) + A_1^{(2)}\varphi(z,m+2) + A_2^{(2)}\varphi(z,m+1) + \\ + A_3^{(2)}\varphi(z,m) + \dots + A_{m+1}^{(2)}\varphi(z,2) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и легко видѣть, что

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(z,m+3) = \frac{z^{m+3}}{(m+3)!} + A_1^{(3)}\frac{z^{m+2}}{(m+2)!} + A_2^{(3)}\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \\ + \dots + A_{m+2}^{(3)} z + A_{m+3}^{(3)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

140. Это легко обобщить на k-кратное суммированіе, и мы получимъ тогда такую формулу:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}{}^{(k)} v_x dx^k + A_1^{(k)} h \int_{x_0}^{x}{}^{(k-1)} v_x dx^{k-1} + A_2^{(k)} h^2 \int_{x_0}^{x}{}^{(k-2)} v_x dx^{k-2} + \ldots + \\ &+ A_{k-1}^{(k)} h^{k-1} \int_{x_0}^{x} v_x dx + A_k^{(k)} h^k v_x + A_{k+1}^{(k)} h^{k+1} v'_x + A_{k+2}^{(k)} h^{k+2} v''_x + \\ &\quad + \ldots + A_{m+k-1}^{(k)} h^{m+k-1} v_x^{(m-1)} + \Phi(x) = h^k \sum_{x_0}^{x}{}^{(k)} v_x + R_m^{(k)} \end{aligned}\right.$$

гдѣ $A_1^{(k)}$, $A_2^{(k)} \ldots A_{m+k-1}^{(k)}$ суть коэффиціенты при x, x^2, $\ldots x^{m+k-1}$ въ разложеніи по восходящимъ степенямъ x функціи

$$(2)\qquad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^k,$$

а

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &R_m^{(k)} = h^{m+k+1} \int_0^1 \left\{ \varphi(z,m+1) \sum_{x_0}^{x}{}^{(k)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \right. \\ &+ \varphi_1(z,m+2) \sum_{x_0}^{x}{}^{(k-1)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \varphi_2(z,m+3) \sum_{x_0}^{x}{}^{(k-2)} v_{x+h-hz}^{(m+1)} + \\ &\quad \left. + \ldots + \varphi_{k-1}(z,m+k) \sum_{x_0}^{x} v_{x+h-hz}^{(m+1)} \right\} dz, \end{aligned}\right.$$

и

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_{k-1}(z,m+k) = \varphi(z,m+k) + A_1^{(k-1)} \varphi(z,m+k-1) + \\ &\quad + A_2^{(k-1)} \varphi(z,m+k-2) + \ldots + A_{m+k-2}^{(k-1)} \varphi(z,2); \end{aligned}\right.$$

расположивъ ее по степенямъ x, будемъ имѣть:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_k(z,m+k) = \frac{z^{m+k}}{(m+k)!} + A_1^{(k)} \frac{z^{m+k-1}}{(m+k-1)!} + \\ &+ A_2^{(k)} \frac{z^{m+k-2}}{(m+k-2)!} + \ldots + A_{m+k-1}^{(k)} z + A_{m+k}^{(k)}; \end{aligned}\right.$$

что же касается $\Phi(x)$, то

$$(6)\quad \Phi(x) = \gamma \frac{x^{(k-1|h)}}{(k-1)!h^{k-1}} + \gamma_1 \frac{x^{(k-2|h)}}{(k-2)!h^{k-2}} + \ldots + \gamma_{k-2} \frac{x^{(1|h)}}{1.h} + \gamma_{k-1}.$$

Докажется это обобщеніе прежде полученныхъ результатовъ по способу заключенія отъ k къ $k+1$. Рѣшая (1) по $\sum\limits_{x_0}^{x}{}^{(k)} v_x$, мы получимъ ея выраженіе чрезъ кратные интегралы до k-кратнаго включительно, и производныя съ остаточнымъ членомъ, въ очень сложной, правда, формѣ; однако при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ относительно v_x^{m+1}, эта форма должна упроститься; мы впрочемъ на этомъ не намѣрены останавливаться.

141 141. Если не требовать остаточнаго члена, то легко вывести символическую формулу, съ помощію которой можно найти сколько угодно членовъ точной формулы. Хотя этотъ выводъ не строгъ, но мы дадимъ его ради его краткости. Обозначая въ (6) § 132 члены независящіе отъ x, а только отъ x_0, чрезъ C и беря неопредѣленные интегралы и сумму, мы будемъ имѣть формулу (гдѣ пишемъ x вмѣсто X):

$$\sum v_x = C + \frac{1}{h}\int v_x dx - \frac{1}{2} v_x + \frac{B_1}{2!} h v_x' - \frac{B_3}{4!} h^3 v_x''' - \ldots \quad (1)$$

Суммируя это равенство, получимъ:

$$\sum^{(2)} v_x = C\frac{x^{(1|h)}}{1 \cdot h} + C_1 + \frac{1}{h}\sum\int v_x dx - \frac{1}{2}\sum v_x + \frac{B_1}{2!} h \sum v_x' - \ldots; \quad (2)$$

по формулѣ (1), перемѣняя v_x на $\int v_x dx, v_x', v_x''$ и т. д. и вставляя выраженія $\sum\int v_x dx$, $\sum v_x$, $\sum v_x'$, $\sum v_x''$, и т. д. во (2), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sum^{(2)} v_x = C\frac{x^{(1|h)}}{1 \cdot h} + C_1 + \frac{1}{h^2}\int^{(2)} v_x dx^2 + \frac{1}{2h}\int v_x dx + \\ + A_1^{(2)} v_x' + A_2^{(2)} v_x'' + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Суммируя эту формулу еще разъ и дѣлая такія же преобразованія, и повторяя эту операцію k разъ, мы придемъ наконецъ къ такой формулѣ:

$$\left.\begin{aligned} \sum^{(k)} v_x = \Phi\left(\overset{k-1}{x}\right) + \frac{1}{h^k}\int^{(k)} v_x dx^{(k)} + A_1^{(k)}\int^{(k-1)} v_x dx^{k-1} + \\ + A_2^{(k)}\int^{(k-2)} v_x dx^{k-2} + \ldots + A_{k-1}^{k}\int v_x dx + \\ + A_k^{(k)} v_x + A_{k+1}^{(k)} v_x' + A_{k+2}^{(k)} v_x'' + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

гдѣ $\Phi\binom{k-1}{x}$ означаетъ цѣлую функцію степени $k-1$ съ произвольными коэффиціентами. Справедливость этой формулы докажется по способу заключенія отъ k къ $k+1$. Чтобы найти коэффиціенты, мы положимъ, $v_x = a^x$; тогда умножая результатъ подстановки a^x вмѣсто v_x въ формулу (4) на a^{-kx}, мы получимъ слѣдующее равенство:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{a^h-1}\right)^k = \frac{1}{h^k(\log a)^k} + A_1^{(k)}\frac{1}{(\log a)^{k-1}} + \ldots + A_{k-1}^k\frac{1}{\log a} + \\ \qquad + A_k^{(k)} + A_{k+1}^{(k)}\log a + A_{k+2}^{(k)}(\log a)^2 + \ldots + a^{-kx}\Phi(x). \end{array}\right.$$

Оно должно имѣть мѣсто для непрерывнаго ряда значеній x, а потому членъ

$$a^{-kx}\Phi(x),$$

какъ единственный, содержащій x, долженъ тождественно обращаться въ нуль; слѣдовательно всѣ коэффиціенты его въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ порознь должны обращаться въ нуль; но тогда (5) обратится въ такое:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{a^h-1}\right)^k = \frac{1}{h^k(\log a)^k} + A_1^{(k)}\frac{1}{(\log a)^{k-1}} + \ldots + A_{k-1}^{(k)}\frac{1}{\log a} + \\ \qquad + A_k^{(k)} + A_{k+1}^{(k)}\log a + A_{k+2}^{(k)}(\log a)^2 + \ldots \end{array}\right.$$

Полагая $\log a = \alpha$, получимъ отсюда:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{e^{h\alpha}-1}\right)^k = \frac{1}{h^k\alpha^k} + A_1^{(k)}\frac{1}{\alpha^{k-1}} + A_2^{(k)}\frac{1}{\alpha^{k-2}} + \ldots + A_{k-1}^{(k)}\frac{1}{\alpha} + \\ \qquad + A_k^{(k)} + A_{k+1}^{(k)}\alpha + A_{k+2}^{(k)}\alpha^2 + \ldots \end{array}\right.$$

откуда и видно, что коэффиціенты $A_1^{(k)}$, $A_2^{(k)}\ldots$ суть коэффиціенты въ разложеніи функціи

$$(8)\qquad \left(\frac{1}{e^{h\alpha}-1}\right)^k$$

въ рядъ по возрастающимъ степенямъ α. Перемѣнивъ α на $\frac{d}{dx}$ и условившись принимать

$$(9)\qquad \left(\frac{d}{dx}\right)^{-m} = \int^{(m)} v_x dx^m \quad \text{и} \quad \frac{d^p}{dx^p}v_x = v_x^{(p)},$$

мы получимъ послѣ умноженія на v_x обѣихъ частей имѣющагося получиться изъ (7) чрезъ эту замѣну α чрезъ $\frac{d}{dx}$ равенства, такое:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}}-1}\right)^k v_x = \frac{1}{h^k}\int^{(k)} v_x dx^k + A_1^{(k)}\int^{(k-1)} v_x d^{k-1}x + \ldots +\\ + A_{k-1}^{(k)}\int v_x dx + A_k^{(k)} v_x + A_{k+1}^{(k)} v'_x + A_{k+2}^{(k)} v''_x + \ldots;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

сличая это съ (4) и получаемъ окончательно такую символическую формулу:

$$\sum^{(k)} v_x = \left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-k} v_x + \Phi\binom{k-1}{x}, \quad (11)$$

—вводя еще отрицательные показатели.—Эту формулу можно получить и сразу, разумѣется съ еще меньшею строгостью замѣчая, что по откидываніи функціональнаго символа въ (7) § 133 и постояннаго C, будетъ

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1} = \sum, \quad (12)$$

повторяя эту операцію k разъ, получимъ

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-k} = \sum^{(k)}; \quad (13)$$

помножая на v_x и придавая $\Phi\binom{k-1}{x}$, получимъ формулу (11).

142. 142. Изъ формулы Маклореня можно вывести извѣстныя формулы для механическихъ квадратуръ Симсона и Понселе; но мы на этомъ останавливаться не будемъ: читатель это найдетъ вмѣстѣ съ выводомъ Маклореневой формулы, принадлежащимъ Ак. Имшенецкому, въ концѣ I тома курса Гуэля *), мы же перейдемъ теперь ко второму отдѣлу обратнаго исчисленія конечныхъ разностей, именно къ интегрированію уравненій въ конечныхъ разностяхъ.

*) Cours de Calcul infitesimal par Hoüel. Paris, 1878 г. Т. I, p. 475 и слѣдующія;

(3) $$u_x = x\frac{\Delta u_x}{h} + f\left(\frac{\Delta u_x}{h}\right).$$

Для втораго примѣра пусть будетъ

(4) $$u_x = Ca^x + C_1b^x;$$

мѣняя x на $x+h$, получимъ:

(5) $$u_{x+h} = Ca^{x+h} + C_1b^{x+h};$$

еще разъ производя такую перемѣну, получимъ:

(6) $$u_{x+2h} = Ca^{x+2h} + C_1b^{x+2h};$$

исключая

$$Ca^x \quad \text{и} \quad C_1b^x$$

изъ этихъ трехъ уравненій, получимъ:

(7) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u_x \\ a^h & b^h & u_{x+h} \\ a^{2h} & b^{2h} & u_{x+2h} \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая опредѣлитель лѣвой части по элементамъ послѣдняго столбца:

$$(b^h - a^h)u_{x+2h} + (a^{2h} - b^{2h})u_{x+h} + (a^hb^{2h} - a^{2h}b^h)u_x = 0,$$

или, сокращая на $b^h - a^h$:

(8) $$u_{x+2h} - (a^h + b^h)u_{x+h} + a^hb^hu_x = 0.$$

Это уравненіе есть *линейное* безъ послѣдняго члена, ибо послѣдовательныя значенія функціи u_x входятъ во всѣ члены въ первой степени.

Если бы мы взяли двѣ послѣдовательныя разности отъ (4), то получили бы:

(9) $$\begin{cases} \Delta u_x = Ca^x(a^h - 1) + C_1b^x(b^h - 1); \\ \Delta^2 u_x = Ca^x(a^h - 1)^2 + C_1b^x(b^h - 1)^2; \end{cases}$$

исключая Ca^x и Cb^x изъ (4) и (9), получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u_x \\ (a^h-1) & (b^h-1) & \Delta u_x \\ (a^h-1)^2 & (b^h-1)^2 & \Delta^2 u_x \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

или раскрывая по элементамъ послѣдняго столбца:

$$(b^h-a^h)\Delta^2 u_x + \left((a^h-1)^2-(b^h-1)^2\right)\Delta u_x +$$

$$+\left[(a^h-1)(b^h-1)^2-(a^h-1)^2(b^h-1)\right]u_x = 0,$$

что по сокращеніи на

$$b^h-a^h = \left(b^h-1\right)-\left(a^h-1\right)$$

принимаетъ такой видъ:

$$\Delta^2 u_x - \left(a^h+b^h-2\right)\Delta u_x + \left(a^h-1\right)\left(b^h-1\right)u_x = 0. \tag{11}$$

Это линейное уравненіе безъ послѣдняго члена въ другой формѣ.— Раскрывая скобки, получимъ:

$$\Delta^2 u_x + 2\Delta u_x + u_x - \left(a^h+b^h\right)\left(u_x+\Delta u_x\right) + a^h b^h u_x = 0,$$

или

$$u_{x+2h} - \left(a^h+b^h\right)u_{x+h} + a^h b^h u_x = 0, \tag{11}$$

что тождественно съ (8).

146. Уравненіе въ конечныхъ разностяхъ:

$$F\left(x, u_x, \Delta u_x, \Delta^2 u_x, \ldots \Delta^n u_x\right) = 0 \tag{1}$$

имѣетъ интегралъ, заключающій n произвольныхъ постоянныхъ. Дѣйствительно, рѣшая (1) по $\Delta^n u_x$, получимъ:

$$\Delta^n u_x = f\left(x, u_x, \Delta u_x, \Delta^2 u_x, \ldots \Delta^{n-1} u_x\right); \tag{2}$$

взявъ конечную разность отъ обѣихъ частей, и исключая изъ результата при помощи (2) разность n-го порядка, получимъ:

*

$$(3)\qquad \triangle^{n+1}u_x=\varphi_1\left(x\,,u_x\,,\triangle u_x\,,\triangle^2 u_x\,,\dots\triangle^{n-1}u_x\right);$$

продолжая дѣлать тоже самое, будемъ имѣть вообще:

$$(4)\qquad \triangle^{n+r}u_x=\varphi_r\left(x\,,u_x\,,\triangle u_x\,,\triangle^2 u_x\,,\dots\triangle^{n-1}u_x\right).$$

Но

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} u_{x+ph}&=u_x+C_1^p\triangle u_x+C_2^p\triangle^2 u_x+\dots+\\ &+C_{n-1}^p\triangle^{n-1}u_x+C_n^p\triangle^n u_x+\dots+\triangle^p u_x;\end{aligned}\right.$$

полагая во (2), (3) и (4)

$$x=\alpha\,,\qquad u_\alpha=C_1;\quad \triangle u_\alpha=C_2\dots\triangle^{n-1}u_\alpha=C_n\,,$$

мы будемъ имѣть и $\triangle^{n+r}u_\alpha$ для всякаго r выраженнымъ чрезъ эти величины; замѣняя затѣмъ въ (5) $\alpha+ph$ чрезъ x, и подставляя выраженія $\triangle^{n+r}u_x$ въ (5), мы будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} u_x=C_1&+C_1^p C_2+C_x^p C_3+\dots+C_{n-1}^p C_n+\\ &+C_n^p\varphi(\alpha,C_1\,C_2\dots C_n)+\\ &+C_{n+1}^p\varphi_1(\dots\dots\dots\dots)+\\ &\quad\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+C_p^p\varphi_{p-n}(\dots\dots\dots\dots);\end{aligned}\right.$$

но $p=\dfrac{x-\alpha}{h}$; внося это въ числители биноміальныхъ коэффиціентовъ, получимъ u_x выраженнымъ чрезъ x и n произвольныхъ постоянныхъ. Это будетъ интерполяціонная формула для u_x; съ помощію ея можно вычислять значенія u_x для всякаго x между α и $\alpha+ph$; для другаго p можно получить другую формулу, подобную этой. Отсюда видимъ, что всегда можно вычислить значеніе u_x для даннаго x, когда кромѣ уравненія даны еще для $x=\alpha$ значенія u_x и ея $n-1$ послѣдовательныхъ разностей. Но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы функцію удовлетворяющую уравненію (1), или, что тоже (2), всегда можно было бы выразить при помощи извѣстныхъ функцій: это удается въ очень немногихъ случаяхъ; простѣйшіе изъ этихъ случаевъ и въ то же время наиболѣе замѣчательные, мы ниже и разсмотримъ. Еще проще получается этотъ выводъ для второй формы разностныхъ уравненій, что предоставляемъ читателю сдѣлать самому.

147. Къ числу уравненій въ конечныхъ разностяхъ, интегралъ которыхъ можетъ быть найденъ, или сведенъ къ суммированію, относятся линейныя уравненія, (примѣръ которыхъ мы имѣли въ § 145), общій видъ которыхъ для 1-го порядка есть слѣдующій:

$$\Delta u_x + P_x u_x = Q_x , \qquad (1)$$

гдѣ P_x и Q_x суть функціи одного x, или постоянныя величины, или же такой:

$$u_{x+h} + R_x u_x = Q_x , \qquad (2)$$

гдѣ R_x и Q_x тоже или функціи одного x или постоянныя. Если въ первое изъ нихъ вставить вмѣсто Δu_x его выраженіе чрезъ значенія функціи:

$$\Delta u_x = u_{x+h} - u_x , \qquad (3)$$

или въ послѣднее выраженіе u_{x+h} чрезъ u_x и разность Δu_x:

$$u_{x+h} = u_x + \Delta u_x , \qquad (4)$$

то легко найдемъ, что

$$R_x = P_x - 1 , \qquad (5)$$

или

$$P_x = R_x + 1 . \qquad (6)$$

Въ обѣихъ формахъ линейное уравненіе въ конечныхъ разностяхъ перваго порядка интегрируется по способамъ, аналогичнымъ способамъ интегрированія линейнаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

148. Положимъ въ (1) предыдущаго §:

$$u = v_x \cdot w_x ; \qquad (1)$$

тогда будемъ имѣть:

$$\Delta u_x = v_x \Delta w_x + w_{x+h} \Delta v_x ; \qquad (2)$$

внося въ упомянутое уравненіе, будемъ имѣть:

$$v_x \Delta w_x + w_{x+h} \Delta v_x + P_x v_x w_x = Q_x ,$$

или

$$v_x (\Delta w_x + P_x w_x) + w_{x+h} \Delta v_x = Q_x .$$

Такъ какъ одною изъ введенныхъ вмѣсто u_x функцій мы можемъ располагать по произволу, то можемъ для опредѣленія ея положить:

(4) $$\Delta w_x + P_x w_x = 0,$$

и тогда (3) приведется къ такому:

(5) $$w_{x+h}\,\Delta v_x = Q_x.$$

Перенеся въ (4) второй членъ въ другую часть уравненія и прибавивъ къ обѣимъ частямъ его по w_x, мы получимъ:

$$w_x + \Delta w_x = (1 - P_x) w_x,$$

или

$$w_{x+h} = (1 - P_x) w_x;$$

дѣля обѣ части на w_x и логариѳмируя, получимъ:

(6) $$\log \frac{w_{x+h}}{w_x} = \log(1 - P_x);$$

лѣвая же часть есть не что иное, какъ $\Delta \log w_x$; а потому окончательно это уравненіе такъ представится:

(7) $$\Delta \log w_x = \log(1 - P_x).$$

Отсюда же, суммируя, находимъ:

(8) $$\log w_x = \sum_{\alpha}^{x} \log(1 - P_x) + \log C_1.$$

Но это C_1, какъ увидимъ, всегда можно принять $= 1$. Изъ (8) имѣемъ:

(9) $$w_x = C_1 e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(1 - P_x)};$$

внося это въ (5), будемъ имѣть оттуда:

(10) $$\Delta v_x = \frac{1}{C_1} Q_x e^{-\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(1 - P_x)};$$

отсюда, суммируя, получаемъ:

$$v_x = \frac{1}{C_1}\left\{\sum_a^x Q_x e^{-\sum_a^{x+h}\log(1-P_x)} + C\right\}; \tag{11}$$

вносяя отсюда и изъ (9) въ (1), будемъ имѣть окончательно:

$$u_x = v_x . w_x = e^{\sum_a^x \log(1-P_x)}\left\{\sum_a^x Q_x e^{-\sum_a^{x+h}\log(1-P_x)} + C\right\}, \tag{12}$$

откуда дѣйствительно C_1 исчезло. Это и будетъ интегралъ линейнаго уравненія въ конечныхъ разностяхъ 1-го порядка. Въ этой формѣ онъ совершенно аналогиченъ интегралу линейнаго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка. Но здѣсь первое суммированіе можно выполнить:

$$\sum_a^x \log(1-P_x) = \log\left\{\prod_a^x (1-P_x)\right\}; \tag{13}$$

слѣдовательно

$$e^{\sum_a^x \log(1-P_x)} = \prod_a^x (1-P_x): \tag{14}$$

и

$$e^{-\sum_a^{x+h}\log(1-P_x)} = \frac{1}{\prod_a^{x+h}(1-P_x)}; \tag{15}$$

вносяя это въ (12), получимъ:

$$u_x = \prod_a^x (1-P_x)\left\{\sum_a^x \frac{Q_x}{\prod_a^{x+h}(1-P_x)} + C\right\}. \tag{16}$$

149. Только что изложенный методъ интегрированія линейнаго уравненія въ конечныхъ разностяхъ перваго порядка примѣнимъ и къ другой формѣ этого уравненія, т. е. къ интегрированію уравненія

$$u_{x+h} + R_x u_x = Q_x. \tag{1}$$

Въ этомъ случаѣ изъ положеннаго равенства

Такъ какъ одною изъ введенныхъ вмѣсто u_x функцій мы можемъ располагать по произволу, то можемъ для опредѣленія ея положить:

$$\triangle w_x + P_x w_x = 0, \tag{4}$$

и тогда (3) приведется къ такому:

$$w_{x+h} \triangle v_x = Q_x. \tag{5}$$

Перенеся въ (4) второй членъ въ другую часть уравненія и прибавивъ къ обѣимъ частямъ его по w_x, мы получимъ:

$$w_x + \triangle w_x = (1 - P_x) w_x,$$

или

$$w_{x+h} = (1 - P_x) w_x;$$

дѣля обѣ части на w_x и логариѳмируя, получимъ:

$$\log \frac{w_{x+h}}{w_x} = \log(1 - P_x); \tag{6}$$

лѣвая же часть есть не что иное, какъ $\triangle \log w_x$; а потому окончательно это уравненіе такъ представится:

$$\triangle \log w_x = \log(1 - P_x). \tag{7}$$

Отсюда же, суммируя, находимъ:

$$\log w_x = \sum_\alpha^x \log(1 - P_x) + \log C_1. \tag{8}$$

Но это C_1, какъ увидимъ, всегда можно принять $= 1$. Изъ (8) имѣемъ:

$$w_x = C_1 e^{\sum_\alpha^x \log(1 - P_x)}; \tag{9}$$

внося это въ (5), будемъ имѣть оттуда:

$$\triangle v_x = \frac{1}{C_1} Q_x e^{-\sum_\alpha^{x+h} \log(1 - P_x)}; \tag{10}$$

отсюда, суммируя, получаемъ:

$$v_x = \frac{1}{C_1}\left\{\sum_a^x Q_x e^{-\sum\limits_a^{x+h}\log(1-P_x)} + C\right\}; \tag{11}$$

внося отсюда и изъ (9) въ (1), будемъ имѣть окончательно:

$$u_x = v_x \,.\, w_x = e^{\sum\limits_a^x \log(1-P_x)}\left\{\sum_a^x Q_x e^{-\sum\limits_a^{x+h}\log(1-P_x)} + C\right\}, \tag{12}$$

откуда дѣйствительно C_1 исчезло. Это и будетъ интегралъ линейнаго уравненія въ конечныхъ разностяхъ 1-го порядка. Въ этой формѣ онъ совершенно аналогиченъ интегралу линейнаго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка. Но здѣсь первое суммированіе можно выполнить:

$$\sum_a^x \log(1-P_x) = \log\left\{\prod_a^x (1-P_x)\right\}; \tag{13}$$

слѣдовательно

$$e^{\sum\limits_a^x \log(1-P_x)} = \prod_a^x (1-P_x): \tag{14}$$

и

$$e^{-\sum\limits_a^{x+h}\log(1-P_x)} = \frac{1}{\prod\limits_a^{x+h}(1-P_x)}; \tag{15}$$

внося это въ (12), получимъ:

$$u_x = \prod_a^x (1-P_x)\left\{\sum_a^x \frac{Q_x}{\prod\limits_a^{x+h}(1-P_x)} + C\right\}. \tag{16}$$

149. Только что изложенный методъ интегрированія линейнаго уравненія въ конечныхъ разностяхъ перваго порядка примѣнимъ и къ другой формѣ этого уравненія, т. е. къ интегрированію уравненія

$$u_{x+h} + R_x u_x = Q_x\,. \tag{1}$$

Въ этомъ случаѣ изъ положеннаго равенства

(2) $$u_x = v_x \cdot w_x$$

будетъ слѣдовать:

(3) $$\begin{cases} u_{x+h} = v_{x+h} \cdot w_{x+h} = \\ = (v_x + \Delta v_x)\, w_{x+h}\,; \end{cases}$$

внося отсюда и изъ (2) въ (1), получимъ:

(4) $$v_x(w_x + R_x w_x) + w_{x+h} \Delta v_x = Q_x\,;$$

полагая здѣсь

(5) $$w_{x+h} + R_x w_x = 0\,,$$

мы приведемъ наше уравненіе къ такому:

(6) $$w_{x+h} \Delta v_x = Q_x\,;$$

такимъ образомъ опять интегрированіе уравненія (1) привелось къ интегрированію уравненій (5) и (6). Изъ перваго находимъ

$$\frac{w_{x+h}}{w_x} = -R_x\,;$$

слѣдовательно

(7) $$\Delta \log w_x = \log\left(\frac{w_{x+h}}{w_x}\right) = \log(-R_x)\,,$$

и потому

(8) $$w_x = C_1 e^{\sum\limits_\alpha^x \log(-R_x)}\,;$$

внося въ (6), получимъ:

$$\Delta v_x = \frac{Q_x}{w_{x+h}} = \frac{1}{C_1} Q_x e^{-\sum\limits_\alpha^{x+h} \log(-R_x)}\,,$$

слѣдовательно

(9) $$v_x = \frac{1}{C_1}\left\{\sum_\alpha^x Q_x e^{-\sum\limits_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} + C\right\},$$

и потому по (2)

$$u_x = e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(-R_x)} \left\{ \sum_{\alpha}^{x} Q_x e^{-\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} + C \right\}, \tag{10}$$

что согласно съ (12) предыдущаго §, ибо по (5) § 147 имѣемъ

$$-R_x = 1 - P_x. \tag{11}$$

Уравненіе (10) можно такъ представить, переходя отъ log къ числу:

$$u_x = \prod_{\alpha}^{x}(-R_x) \left\{ \sum_{\alpha}^{x} \frac{Q_x}{\prod\limits_{\alpha}^{x+h}(-R_x)} + C \right\}. \tag{12}$$

150. Предыдущій способъ можетъ быть еще иначе представленъ, и въ этой новой формѣ онъ распространяется на уравненія высшихъ порядковъ. Мы проинтегрируемъ сперва вмѣсто полнаго уравненія:

$$\Delta u_x + P_x u_x = Q_x \tag{1}$$

или въ другой формѣ

$$u_{x+h} + R_x u_x = Q_x, \tag{2}$$

уравненіе безъ послѣдняго члена, слѣдовательно уравненіе:

$$\Delta w_x + P_x w_x = 0 \tag{3}$$

въ первомъ случаѣ, и

$$w_{x+h} + R_x w_x = 0, \tag{4}$$

во второмъ,—гдѣ мы перемѣнили обозначеніе функціи, такъ какъ это будетъ уже другая функція. Но уравненія (3) и (4) суть соотвѣтственно уравненія (4) § 148 и (5) § 149, а потому интегралы ихъ будутъ соотвѣтственно

$$w_x = C_1 e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(1-P_x)} \tag{5}$$

и

$$w_x = C_1 e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(-R_x)}. \tag{6}$$

Мы попробуемъ удовлетворить данному уравненію (1), [соотвѣтственно (2),] принявъ здѣсь C_1 за нѣкоторую функцію x; перемѣнивъ сообразно съ этимъ обозначеніе ея на C_x, мы будемъ имѣть:

(7) $$u_x = C_x e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)}$$

въ первомъ случаѣ, и

(8) $$u_x = C_x e^{\sum_\alpha^x \log(-R_x)}$$

во второмъ. Изъ (7) имѣемъ по правилу для произведенія двухъ функцій:

(9) $$\Delta u_x = C_x \Delta e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} + e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} \Delta C_x;$$

но по понятію о разности:

(10) $$\left\{\begin{aligned} &\Delta e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} = e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} - e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} = \\ &= e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} \left\{ e^{\log(1-P_x)} - 1 \right\} = \\ &= -P_x e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)}, \end{aligned}\right.$$

[ибо

$$e^{\log(1-P_x)} - 1 = 1 - P_x - 1 = -P_x;]$$

слѣдовательно

(11) $$\Delta u_x = -C_x P_x e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} + e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} \Delta C;$$

внося это въ уравненіе (1), равно какъ и изъ (7) выраженіе u_x, мы получимъ по сокращеніи:

$$\Delta C_x e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} = Q_x,$$

откуда найдемъ

(12) $$C_x = \sum Q_x e^{-\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} + C;$$

внося это въ (7) получимъ:

$$u_x = e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(1-P_x)} \left\{ \sum_{\alpha}^{x} Q_x e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(1-P_x)} + C \right\}, \tag{13}$$

согласно съ (12) § 148.

Точно также изъ (8) имѣемъ:

$$u_{x+h} = C_{x+h} e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} = \left(C_x + \Delta C_x\right) e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)};$$

внося это во (2), получимъ:

$$\left(C_x + \Delta C_x\right) e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} + R_x C_x e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(-R_x)} = Q_x; \tag{14}$$

но

$$-R_x = e^{\log(-R_x)},$$

посему

$$R_x e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(-R_x)} = -e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)};$$

вслѣдствіе этого уравненіе (14) по сокращеніи приметъ такой видъ:

$$\Delta C_x e^{\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} = Q_x, \tag{15}$$

откуда найдемъ

$$C_x = \sum_{\alpha}^{x} Q_x e^{-\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} + C; \tag{16}$$

внося это въ (8), будемъ имѣть:

$$u_x = e^{\sum\limits_{\alpha}^{x} \log(-R_x)} \left\{ \sum_{\alpha}^{x} Q_x e^{-\sum\limits_{\alpha}^{x+h} \log(-R_x)} + C \right\}, \tag{17}$$

что тождественно съ (10) § 149.

151. Пояснимъ изложенное примѣромъ. Пусть дано уравненіе:

(1) $$u_{x+1} - au_x = x^{(m|1)};$$

уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

(2) $$w_{x+1} - aw_x = 0;$$

слѣдовательно

$$\frac{w_{x+1}}{w_x} = a,$$

или

$$\triangle \log w_x = \log a;$$

отсюда

$$\log w_x = \log a . x + \log C = \log Ca^x;$$

слѣдовательно

(3) $$w_x = C a^x.$$

Пусть

(4) $$u_x = C_x a^x;$$

вставляя въ (1), мы получимъ:

(5) $$\triangle C_x = a^{-x-1} x^{(m|1)},$$

откуда найдемъ

(6) $$C_x = \sum_a^x a^{-x-1} x^{(m|1)} + C,$$

и потому будетъ

(7) $$u_x = C_x w_x = a^x \left\{ \sum_a^x a^{-x-1} x^{(m|1)} + C \right\}.$$

Входящее сюда суммированіе можетъ быть выполнено по частямъ, (см. § 107), что мы предоставляемъ читателю сдѣлать самому.

152. Пусть еще дано такое уравненіе:

(1) $$u_{x+1} + u_x = -(x+1).$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

(2) $$w_{x+1} + w_x = 0;$$

отсюда

$$\frac{w_{x+1}}{w_x} = -1,$$

слѣдовательно

$$\Delta \log w_x = \log(-1);$$

суммируя это, получимъ

$$\log w_x = x \log(-1) + \log C,$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$w_x = C(-1)^x. \tag{3}$$

Положимъ теперь

$$u_x = C_x(-1)^x; \tag{4}$$

тогда будетъ

$$\left. \begin{aligned} u_{x+1} = C_{x+1}(-1)^{x+1} = \\ = C_x(-1)^{x+1} + \Delta C_x . (-1)^{x+1}; \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

внося отсюда и изъ (4) въ данное уравненіе (1), будемъ имѣть:

$$C_x(-1)^{x+1} + \Delta C_x . (-1)^{x+1} + C_x(-1)^x = -(x+1);$$

и по сокращеніи

$$\Delta C_x . (-1)^{x+1} = -(x+1);$$

отсюда

$$\Delta C_x = -\frac{x+1}{(-1)^{x+1}} = \frac{x+1}{(-1)^x} = (-1)^{-x}(x+1),$$

или наконецъ

$$\Delta C_x = (-1)^x (x+1), \tag{6}$$

[ибо

$$(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1.]$$

Изъ (6), суммируя, получимъ:

$$C_x = \sum (-1)^x (x+1) + C. \tag{7}$$

Суммируя по частямъ, будемъ имѣть:

$$\sum(-1)^x(x+1)=\frac{(-1)^x}{(-1)^1-1}(x+1)-\sum\frac{(-1)^{x+1}.1}{(-1)^1-1}=$$

$$=\frac{(-1)^x}{-2}(x+1)-\sum\frac{(-1)^{x+1}}{-2}=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)-\frac{1}{2}\sum(-1)^x=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)-\frac{1}{2}\frac{(-1)^x}{(-1)^1-1}=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)+\frac{(-1)^x}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}(-1)^{x+1}(2x+1);$$

внося это въ (7) будемъ имѣть:

(8) $$C_{x_0}=\frac{1}{4}(-1)^{x+1}(2x+1)+C,$$

и вставляя это въ (4), получимъ:

(9) $$u_x=-\frac{1}{4}(2x+1)+C(-1)^x,$$

такъ какъ

$$(-1)^x(-1)^{x+1}=(-1)^{2x+1}=-(-1)^{2x}=-(+1)^x=-1$$

при x цѣломъ.

153. Пусть дано еще такое уравненіе:

(1) $$(x-1)\Delta u_x-2u_x=2;$$

дѣля на $x-1$, дадимъ ему нормальный видъ:

(2) $$\Delta u_x-\frac{2}{x-1}u_x=\frac{2}{x-1}.$$

слѣдовательно по формулѣ (12) § 148:

(3) $$u_x=e^{\sum_a^x\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}\left\{\sum_a^x\frac{2}{x-1}e^{-\sum_a^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}+C\right\}.$$

Но

$$\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\log(x+1)-\log(x-1); \qquad (4)$$

потому

$$\sum_{\alpha}^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\sum_{\alpha}^{x}\left\{\log(x+1)-\log(x-1)\right\}=$$

$$\begin{aligned}
&=\log(\alpha+1)-\log(\alpha-1)+\\
&+\log(\alpha+2)-\log(\alpha)+\\
&+\log(\alpha+3)-\log(\alpha+1)+\\
&+\log(\alpha+4)-\log(\alpha+2)+\\
&+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\\
&+\log(x-1)-\log(x-3)+\\
&+\log x \qquad -\log(x-2)=\\
&=\log x+\log(x-1)-\log\alpha-\log(\alpha-1)=\\
&=\log x(x-1)-\log\alpha(\alpha-1).
\end{aligned}$$

Но $\log\alpha(\alpha-1)$ есть постоянное количество, которое можемъ отбросить, такъ какъ намъ достаточно имѣть частное значенiе $\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)$; тогда будемъ имѣть:

$$\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\log x(x-1); \qquad (5)$$

$$-\sum^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=-\log(x+1)x, \qquad (6)$$

и слѣдовательно

$$e^{\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}=x(x-1); \qquad (7)$$

$$e^{-\sum^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}=\frac{1}{(x+1)x}; \qquad (8)$$

вставляя эти значенiя въ (3), получимъ:

$$u_x=x(x-1)\left\{\sum\frac{2}{x-1}\cdot\frac{1}{x(x+1)}+C\right\}; \qquad (9)$$

но по формулѣ (3) § 97:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum\frac{2.1}{(x-1)x(x+1)}=2\sum(x-1)^{(-3|1)}=-2.\frac{(x-1)^{(-2|1)}}{2.1}= \\ =-(x-1)^{(-2|1)}=\frac{-1}{(x-1)x}; \end{cases}$$

потому (9) окончательно приметъ такой видъ:

$$(11)\qquad u_x=Cx(x-1)-1.$$

154. 154. Найдемъ u_x изъ уравненія

$$(1)\qquad u_{x+1}-e^{2x-1}u_x=e^{x^2}.$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

$$(2)\qquad v_{x+1}-e^{2x-1}v_x=0:$$

отсюда

$$\frac{v_{x+1}}{v_x}=e^{2x-1};$$

слѣдовательно

$$\triangle\log v_x=2x-1,$$

и потому

$$\log v_x=\sum(2x-1)=2\sum x^1-\sum x^0=$$

$$=2\frac{x(x-1)}{2}-x+\log C=x^2-2x+\log C,$$

слѣдовательно

$$(3)\qquad v_x=Ce^{x^2-2x};$$

положивъ

$$(4)\qquad u_x=C_xe^{x^2-2x},$$

будемъ имѣть

$$(5)\qquad u_{x+1}=\left(C_x+\triangle C_x\right)e^{(x+1)^2-2(x+1)};$$

внося изъ (4) и (5) въ (1), будемъ имѣть:

$$u_x = e^{\sum_\alpha^x \log(1-P_x)} \left\{ \sum_\alpha^x Q_x e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(1-P_x)} + C \right\}, \qquad (13)$$

согласно съ (12) § 148.

Точно также изъ (8) имѣемъ:

$$u_{x+h} = C_{x+h} e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} = \left(C_x + \Delta C_x\right) e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)};$$

внося это во (2), получимъ:

$$\left(C_x + \Delta C_x\right) e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} + R_x C_x e^{\sum_\alpha^{x} \log(-R_x)} = Q_x; \qquad (14)$$

но

$$-R_x = e^{\log(-R_x)},$$

посему

$$R_x e^{\sum_\alpha^{x} \log(-R_x)} = -e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)};$$

вслѣдствіе этого уравненіе (14) по сокращеніи приметъ такой видъ:

$$\Delta C_x e^{\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} = Q_x, \qquad (15)$$

откуда найдемъ

$$C_x = \sum_\alpha^x Q_x e^{-\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} + C; \qquad (16)$$

внося это въ (8), будемъ имѣть:

$$u_x = e^{\sum_\alpha^x \log(-R_x)} \left\{ \sum_\alpha^x Q_x e^{-\sum_\alpha^{x+h} \log(-R_x)} + C \right\}, \qquad (17)$$

что тождественно съ (10) § 149.

151. Пояснимъ изложенное примѣромъ. Пусть дано уравненіе:

(1) $$u_{x+1} - a u_x = x^{(m|1)};$$

уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

(2) $$w_{x+1} - a w_x = 0;$$

слѣдовательно

$$\frac{w_{x+1}}{w_x} = a,$$

или

$$\Delta \log w_x = \log a;$$

отсюда

$$\log w_x = \log a \cdot x + \log C = \log C a^x;$$

слѣдовательно

(3) $$w_x = C a^x.$$

Пусть

(4) $$u_x = C_x a^x;$$

вставляя въ (1), мы получимъ:

(5) $$\Delta C_x = a^{-x-1} x^{(m|1)},$$

откуда найдемъ

(6) $$C_x = \sum_a^x a^{-x-1} x^{(m|1)} + C,$$

и потому будетъ

(7) $$u_x = C_x w_x = a^x \left\{ \sum_a^x a^{-x-1} x^{(m|1)} + C \right\}.$$

Входящее сюда суммированіе можетъ быть выполнено по частямъ, (см. § 107), что мы предоставляемъ читателю сдѣлать самому.

152. Пусть еще дано такое уравненіе:

(1) $$u_{x+1} + u_x = -(x+1).$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

(2) $$w_{x+1} + w_x = 0;$$

отсюда

$$\frac{w_{x+1}}{w_x} = -1,$$

слѣдовательно

$$\Delta \log w_x = \log(-1);$$

суммируя это, получимъ

$$\log w_x = x\log(-1) + \log C,$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$w_x = C(-1)^x. \tag{3}$$

Положимъ теперь

$$u_x = C_x(-1)^x; \tag{4}$$

тогда будетъ

$$\left.\begin{aligned} u_{x+1} = C_{x+1}(-1)^{x+1} = \\ = C_x(-1)^{x+1} + \Delta C_x . (-1)^{x+1}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

внося отсюда и изъ (4) въ данное уравненіе (1), будемъ имѣть:

$$C_x(-1)^{x+1} + \Delta C_x . (-1)^{x+1} + C_x(-1)^x = -(x+1);$$

и по сокращеніи

$$\Delta C_x . (-1)^{x+1} = -(x+1);$$

отсюда

$$\Delta C_x = -\frac{x+1}{(-1)^{x+1}} = \frac{x+1}{(-1)^x} = (-1)^{-x}(x+1),$$

или наконецъ

$$\Delta C_x = (-1)^x(x+1), \tag{6}$$

[ибо

$$(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1.]$$

Изъ (6), суммируя, получимъ:

$$C_x = \sum (-1)^x (x+1) + C. \tag{7}$$

Суммируя по частямъ, будемъ имѣть:

$$\sum(-1)^x(x+1)=\frac{(-1)^x}{(-1)^1-1}(x+1)-\sum\frac{(-1)^{x+1}.1}{(-1)^1-1}=$$

$$=\frac{(-1)^x}{-2}(x+1)-\sum\frac{(-1)^{x+1}}{-2}=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)-\frac{1}{2}\sum(-1)^x=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)-\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^x}{(-1)^1-1}=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x+1)+\frac{(-1)^x}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}(-1)^{x+1}(2x+1);$$

внося это въ (7) будемъ имѣть:

(8) $$C_x=\frac{1}{4}(-1)^{x+1}(2x+1)+C,$$

и вставляя это въ (4), получимъ:

(9) $$u_x=-\frac{1}{4}(2x+1)+C(-1)^x,$$

такъ какъ

$$(-1)^x(-1)^{x+1}=(-1)^{2x+1}=-(-1)^{2x}=-(+1)^x=-1$$

при x цѣломъ.

153. Пусть дано еще такое уравненіе:

(1) $$(x-1)\Delta u_x-2u_x=2;$$

дѣля на $x-1$, дадимъ ему нормальный видъ:

(2) $$\Delta u_x-\frac{2}{x-1}u_x=\frac{2}{x-1}.$$

слѣдовательно по формулѣ (12) § 148:

(3) $$u_x=e^{\sum\limits_a^x\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}\left\{\sum_a^x\frac{2}{x-1}e^{-\sum\limits_a^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}+C\right\}.$$

Но

$$\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\log(x+1)-\log(x-1)\,; \qquad (4)$$

потому

$$\sum_{\alpha}^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\sum_{\alpha}^{x}\left\{\log(x+1)-\log(x-1)\right\}=$$

$$\begin{aligned}
&=\log(\alpha+1)-\log(\alpha-1)+\\
&+\log(\alpha+2)-\log(\alpha)+\\
&+\log(\alpha+3)-\log(\alpha+1)+\\
&+\log(\alpha+4)-\log(\alpha+2)+\\
&+\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\\
&+\log(x-1)-\log(x-3)+\\
&+\log x \qquad\quad -\log(x-2)=\\
=\;&\log x+\log(x-1)-\log\alpha-\log(\alpha-1)=\\
=\;&\log x(x-1)-\log\alpha(\alpha-1).
\end{aligned}$$

Но $\log\alpha(\alpha-1)$ есть постоянное количество, которое можемъ отбросить, такъ какъ намъ достаточно имѣть частное значеніе $\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)$; тогда будемъ имѣть:

$$\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=\log x(x-1)\,; \qquad (5)$$

$$-\sum^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)=-\log(x+1)x\,, \qquad (6)$$

и слѣдовательно

$$e^{\sum^{x}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}=x(x-1)\,; \qquad (7)$$

$$e^{-\sum^{x+1}\log\left(1-\frac{-2}{x-1}\right)}=\frac{1}{(x+1)x}\,; \qquad (8)$$

вставляя эти значенія въ (3), получимъ:

$$u_x=x(x-1)\left\{\sum\frac{2}{x-1}\cdot\frac{1}{x(x+1)}+C\right\}; \qquad (9)$$

но по формулѣ (3) § 97:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum \frac{2.1}{(x-1)x(x+1)} = 2\sum (x-1)^{(-3|1)} = -2.\frac{(x-1)^{(-2|1)}}{2.1} = \\ = -(x-1)^{(-2|1)} = \frac{-1}{(x-1)x}; \end{cases}$$

потому (9) окончательно приметъ такой видъ:

$$(11)\qquad u_x = Cx(x-1) - 1.$$

154. Найдемъ u_x изъ уравненія

$$(1)\qquad u_{x+1} - e^{2x-1} u_x = e^{x^2}.$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

$$(2)\qquad v_{x+1} - e^{2x-1} v_x = 0:$$

отсюда

$$\frac{v_{x+1}}{v_x} = e^{2x-1};$$

слѣдовательно

$$\Delta \log v_x = 2x - 1,$$

и потому

$$\log v_x = \sum (2x-1) = 2\sum x^1 - \sum x^0 =$$

$$= 2\frac{x(x-1)}{2} - x + \log C = x^2 - 2x + \log C,$$

слѣдовательно

$$(3)\qquad v_x = Ce^{x^2-2x};$$

положивъ

$$(4)\qquad u_x = C_x e^{x^2-2x},$$

будемъ имѣть

$$(5)\qquad u_{x+1} = \left(C_x + \Delta C_x\right) e^{(x+1)^2 - 2(x+1)};$$

внося изъ (4) и (5) въ (1), будемъ имѣть:

$$\left(C_x+\Delta C_x\right)e^{(x+1)^2-2(x+1)}-C_x e^{x^2-2x}e^{2x-1}=e^{x^2} \qquad (6)$$

или, такъ какъ $(x+1)^2-2(x+1)=(x+1-1)^2-1=x^2-1$,

$$\Delta C_x \cdot e^{x^2-1}=e^{x^2}; \qquad (7)$$

или

$$\Delta C_x=e; \qquad (8)$$

суммируя, найдемъ

$$C_x=x\cdot e+C; \qquad (9)$$

внося въ (4), получимъ:

$$u_x=x\cdot e^{(x-1)^2}+Ce^{x^2-2x}, \qquad (10)$$

или, полагая $C:e=c$, окончательно:

$$u_x=e^{(x-1)^2}(x+c). \qquad (11)$$

155. Переходимъ теперь къ теоріи линейныхъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ высшаго порядка. Общій видъ ихъ въ первой формѣ такой:

$$K_0\Delta^n u_x+K_1\Delta^{n-1}u_x+K_2\Delta^{n-2}u_x+\ldots+K_{n-1}\Delta u_x+K_n u_x=Q_x, \qquad (1)$$

гдѣ K_0, K_1, $K_2\ldots K_{n-1}$, K_n и Q_x суть либо функціи одного x, либо постоянныя; въ послѣднемъ случаѣ уравненіе называется линейнымъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ съ постоянными коэффиціентами; если $Q_x=0$, то будемъ имѣть уравненіе *безъ послѣдняго члена.* Во второй формѣ общій видъ его будетъ:

$$L_0 u_{x+nh}+L_1 u_{x+\overline{n-1}h}+L_2 u_{x+\overline{n-2}h}+\ldots+L_{n-1}u_{x+h}+L_n u_x=Q_x, \qquad (2)$$

гдѣ L_0, L_1, $L_2\ldots L_n$ и Q_x суть тоже или функціи x, или постоянныя. Если въ (1) $Q_x:K_n=$ пост., то перемѣняя u_x на $v_x+(Q:K_n)$, мы получимъ уравненіе для v_x съ тѣми же коэффиціентами, но безъ послѣдняго члена, какъ въ томъ нетрудно убѣдиться. Мы увидимъ, что умѣя находить интегралы линейныхъ уравненій безъ послѣдняго члена, можно всегда найти и интегралъ полнаго уравненія, т. е. съ послѣднимъ членомъ. Точно также зная одно частное рѣшеніе уравненія (1) или (2), мы сведемъ отысканіе полнаго интеграла *) уравненія съ послѣднимъ

*) т. е. заключающаго n произвольныхъ постоянныхъ.

членомъ къ отысканію полнаго интеграла уравненія съ тѣми же коэффиціентами, но безъ послѣдняго члена. Дѣйствительно, если $u_x^{(0)}$ есть рѣшеніе уравненія (1) [или (2)], то полагая

(3) $$u_x = u_x^{(0)} + v_x$$

и вставляя въ данное уравненіе [(1)], мы будемъ имѣть:

$$K_0 \Delta^n v_x + K_1 \Delta^{n-1} v_x + \ldots + K_{n-1} \Delta v_x + K_n v_x = 0\,,$$

ибо

$$K_0 \Delta^n u_x^{(0)} + K_1 \Delta^{n-1} u_x^{(0)} + \ldots + K_{n-1} \Delta u_x^{(0)} + K_n u_x^{(0)} = Q_x\,,$$

по предположенію. [Тоже имѣетъ мѣсто и для другой формы.] Отсюда слѣдуетъ, что мы должны прежде заняться уравненіями безъ послѣдняго члена.

156. 156. Пусть дано уравненіе безъ послѣдняго члена въ первой формѣ:

(1) $$K_0 \Delta^n u_x + K_1 \Delta^{n-1} u_x + \ldots + K_{n-1} \Delta u_x + K_n u_x = 0\,;$$

относительно его имѣются слѣдующія предложенія:

I. Если положеніе $u_x = v_x$ ему удовлетворяетъ, то ему удовлетворитъ и $u_x = Cv_x$. Дѣйствительно, вставляя это послѣднее значеніе u_x въ (1), будемъ имѣть, такъ какъ

$$\Delta^m C v_x = C \Delta^m v_x\,,$$

такой результатъ:

$$C(K_0 \Delta^n v_x + K_1 \Delta^{n-1} v_x + \ldots + K_n v_x) = 0$$

тождественно, ибо множитель въ скобкахъ ( ) по предложенію тождественно $= 0$.

II. Если функціи $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots v_x^{(m)}$ удовлетворяютъ уравненію (1), будучи подставлены въ него вмѣсто, u_x то ему удовлетворитъ и функція

(2) $$u_x = C_1 v_x^{(1)} + C_2 v_x^{(2)} + \ldots + C_m v_x^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=m} C_i v_x^{(i)}.$$

Дѣйствительно,

(3) $$\Delta^k u_x = \sum_{i=1}^{i=m} C_i \Delta^k v_x^{(i)}\,;$$

а потому результатъ вставки этой функціи вмѣсто u_x въ (1) будетъ:

$$\sum_{i=0}^{i=m} C_i(K_0\Delta^n v_x^{(i)} + K_1\Delta^{n-1}v_x^{(i)} + \ldots + K_n v_x^{(i)}) = 0$$

тождественно, ибо множитель каждаго C_i въ лѣвой части по предположенію тождественно равенъ нулю.

III. Если n частныхъ интеграловъ уравненія (1), именно: $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)}, \ldots v_x^{(n)}$ суть линейно независимы, т. е. таковы, что между ними нѣтъ соотношенія вида:

$$A_1v_x^{(1)} + A_2v_x^{(2)} + \ldots + A_nv_x^{(n)} = 0\,, \tag{4}$$

то тогда они составятъ *полную систему частныхъ интеграловъ* даннаго уравненія (1), и выраженіе

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)} \tag{5}$$

будетъ *полнымъ интеграломъ* даннаго уравненія, ибо будетъ содержать n произвольныхъ постоянныхъ C_1, $C_2, \ldots C_n$.

IV. Всякій другой интегралъ $v_x^{(n+1)}$ выразится чрезъ интегралы полной системы по формулѣ (5). Дѣйствительно, полагая

$$v_x^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)}\,, \tag{6}$$

мы будемъ имѣть для опредѣленія значенія произвольныхъ постоянныхъ такую систему n уравненій:

$$\left.\begin{aligned} v_x^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)}\,, \\ \Delta v_x^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{i=n} C_i \Delta v_x^{(i)}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{n-1} v_x^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{i=n} C_i \Delta^{(n-1)} v_x^{(i)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

опредѣлитель которой:

$$\begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} \dots & v_x^{(n)} \\ \triangle v_x^{(1)} & \triangle v_x^{(2)} \dots & \triangle v_x^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \triangle^{n-1} v_x^{(1)} & \triangle^{n-1} v_x^{(2)} \dots & \triangle^{n-1} v_x^{(n)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

не $=0$, [ибо иначе между $v_x^{(i)}$ имѣло бы мѣсто соотношеніе вида (1);] а въ такомъ случаѣ изъ уравненій (7) для C_1, $C_2 \dots C_n$ получатся конечныя и опредѣленныя значенія, вообще отличныя отъ нуля, покрайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ нихъ.

157. Тоже предложеніе можно доказать и въ томъ случаѣ, когда уравненіе въ конечныхъ разностяхъ n-го порядка дано во второй формѣ, именно:

$$(1) \qquad L_0 u_{x+nh} + L_1 u_{x+\overline{n-1}h} + L_2 u_{x+\overline{n-2}h} + \dots + L_{n-1} u_{x+h} + L_n u_x = 0.$$

Пусть $u_x = v_x$ ему удовлетворяетъ; тогда и $u_x = Cv_x$ будетъ ему удовлетворять. Дѣйствительно

$$u_{x+mh} = Cv_{x+mh};$$

вставляя, получимъ такой результатъ:

$$C\left\{L_0 v_{x+nh} + L_1 v_{x+\overline{n-1}h} + \dots + L_n v_x\right\} = 0$$

тождественно, ибо выраженіе въ скобкахъ { } тождественно равно нулю, такъ какъ v_x по предположенію удовлетворяетъ уравненію (1). — Далѣе, если $v_x^{(1)}$, $v_x^{(2)} \dots v_x^{(m)}$ суть частныя рѣшенія уравненія (1), то и функція

$$(2) \qquad u_x = \sum_{i=1}^{i=m} C_i v_x^{(i)}$$

будетъ его рѣшеніемъ; дѣйствительно

$$(3) \qquad u_{x+kh} = \sum_{i=1}^{i=m} C_i v_{x+kh}^{(i)};$$

вставляя это для $k = 1, 2, 3 \dots n$ въ (1) и располагая по C_i, получимъ:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} C_i \left\{L_0 v_{x+nh}^{(i)} + L_1 v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)} + \dots + L_n v_x^{(i)}\right\} = 0$$

тождественно, ибо множитель при каждомъ C_i тождественно равенъ нулю, такъ какъ $v_x^{(i)}$ по предположенію удовлетворяетъ уравненію (1).—Если $m = n$ и $v_x^{(i)}$ линейно независимы, т. е. не связаны уравненіемъ вида (4) предыдущаго §, то

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)} \tag{5}$$

будетъ полнымъ интеграломъ, и всякій иной интегралъ нашего уравненія $v_x^{(n+1)}$ выразится чрезъ $v_x^{(1)}, v_x^{(2)} \ldots v_x^{(n)}$ по формулѣ (5). Дѣйствительно, полагая

$$v_x^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)}, \tag{6}$$

мы будемъ имѣть для опредѣленія значеній произвольныхъ постоянныхъ такую систему n уравненій:

$$\left.\begin{aligned} v_x^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{i=n} C_i v_x^{(i)}, \\ v_{x+h}^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{i=n} C_i v_{x+h}^{(i)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_{x+\overline{n-1}h}^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{i=n} C_i v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которую получимъ изъ (6), перемѣняя послѣдовательно x на x, $x+h, \ldots x+\overline{n-1}h$. Опредѣлитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} & \ldots v_x^{(n)} \\ v_{x+h}^{(1)} & v_{x+h}^{(2)} & \ldots v_{x+h}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{x+\overline{n-1}h}^{(1)} & v_{x+\overline{n-1}h}^{(2)} & \ldots v_{x+\overline{n-1}h}^{(n)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

не равенъ нулю, ибо иначе между $v_x^{(1)}, v_x^{(2)}, \ldots v_x^{(n)}$ имѣло бы мѣсто соотношеніе вида (4) предыдущаго §; а потому, рѣшая уравненія (7), мы

получимъ для C_1, C_2, ... C_n значенія конечныя и опредѣленныя, отличныя вообще отъ нуля, покрайней мѣрѣ нѣкоторыя.

158. Опредѣлители (8) §§ 156 и 157 равны между собою; въ самомъ дѣлѣ отъ одной формы линейнаго уравненія къ другой переходъ дѣлается при помощи формулъ (4) § 29 и (7) § 31, линейныхъ относительно элементовъ каждаго изъ столбцевъ нашихъ опредѣлителей; слѣдовательно, если въ одномъ изъ этихъ опредѣлителей замѣнимъ элементы ихъ выраженіями по надлежащей изъ упомянутыхъ формулъ, то получимъ опредѣлитель, который приведется къ произведенію другого изъ нихъ, на опредѣлитель, котораго всѣ элементы по одну сторону главной діагонали будутъ $= 0$, тогда какъ элементы самой діагонали будутъ $= 1$, и который потому самъ будетъ $= 1$. Это же легко провѣрить на самомъ дѣлѣ, именно отъ каждаго изъ нашихъ двухъ опредѣлителей легко перейти къ другому. Въ самомъ дѣлѣ вычитая изъ каждой строки опредѣлителя (8) предыдущаго §, предшествующую, мы, не измѣняя величины опредѣлителя нашего, дадимъ ему такой видъ:

$$(9) \qquad V = \begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} & \cdots & v_x^{(n)} \\ \Delta v_x^{(1)} & \Delta v_x^{(2)} & \cdots & \Delta v_x^{(n)} \\ \Delta v_{x+h}^{(1)} & \Delta v_{x+h}^{(2)} & \cdots & \Delta v_{x+h}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta v_{x+\overline{n-2}h}^{(1)} & \Delta v_{x+\overline{n-2}h}^{(2)} & \cdots & \Delta v_{x+\overline{n-2}h}^{(n)} \end{vmatrix};$$

вычитая здѣсь каждую строку, начиная со второй, изъ слѣдующей, мы, не измѣняя величины опредѣлителя, дадимъ такой видъ ему:

$$\begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} & \cdots & v_x^{(n)} \\ \Delta v_x^{(1)} & \Delta v_x^{(2)} & \cdots & \Delta v_x^{(n)} \\ \Delta^2 v_x^{(1)} & \Delta^2 v_x^{(2)} & \cdots & \Delta^2 v_x^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(1)} & \Delta^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(2)} & \cdots & \Delta^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(n)} \end{vmatrix};$$

продолжая это, мы и придемъ къ опредѣлителю (8) § 156. Отъ этого послѣдняго мы придемъ къ опредѣлителю (8) § 157, *придавая* каждую строчку къ слѣдующей, сперва начиная съ первой, потомъ со второй, и т. д.

159. Покажемъ теперь какимъ образомъ, зная интегралъ линейнаго уравненія n-го порядка безъ послѣдняго члена:

$$K_0\Delta^n u_x + K_1\Delta^{n-1} u_x + \ldots + K_{n-1}\Delta u_x + K_n v_x = 0; \qquad (1)$$

можно будетъ найти, и притомъ при помощи однихъ суммированій, интегралъ полнаго уравненія:

$$K_0\Delta^n u_x + K_1\Delta^{n-1} u_x + \ldots + K_{n-1}\Delta u_x + K_n u_x = Q_x. \qquad (2)$$

Мы видѣли, что общій интегралъ уравненія (1) можно такъ представить:

$$v_x = \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)} v_x^{(i)}; \qquad (3)$$

попробуемъ удовлетворить уравненію (2), принявъ въ этой формулѣ $C^{(i)}$ за нѣкоторыя функціи x, т. е. другими словами,—принявъ:

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_x^{(i)}. \qquad (4)$$

Здѣсь у насъ n неизвѣстныхъ функцій; слѣдовательно $n-1$ условій для ихъ опредѣленія мы можемъ назначить по произволу; остальное же будетъ вытекать изъ условія, что выраженіе (4) должно быть интеграломъ уравненія (2). Взявъ разность отъ (4), будемъ имѣть:

$$\Delta u_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} \Delta v_x^{(i)} + v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} \right); \qquad (5)$$

положивъ теперь

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0, \qquad (6)$$

мы будемъ имѣть первое условіе для опредѣленія функцій $C_x^{(i)}$, послѣ чего (5) приведется къ такому:

$$\Delta u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} \Delta v_x^{(i)}, \qquad (7)$$

получимъ для C_1, $C_2, \ldots C_n$ значенія конечныя и опредѣленныя, отличныя вообще отъ нуля, покрайней мѣрѣ нѣкоторыя.

158. Опредѣлители (8) §§ 156 и 157 равны между собою; въ самомъ дѣлѣ отъ одной формы линейнаго уравненія къ другой переходъ дѣлается при помощи формулъ (4) § 29 и (7) § 31, линейныхъ относительно элементовъ каждаго изъ столбцевъ нашихъ опредѣлителей; слѣдовательно, если въ одномъ изъ этихъ опредѣлителей замѣнимъ элементы ихъ выраженіями по надлежащей изъ упомянутыхъ формулъ, то получимъ опредѣлитель, который приведется къ произведенію другого изъ нихъ на опредѣлитель, котораго всѣ элементы по одну сторону главной діагонали будутъ $=0$, тогда какъ элементы самой діагонали будутъ $=1$, и который потому самъ будетъ $=1$. Это же легко провѣрить на самомъ дѣлѣ, именно отъ каждаго изъ нашихъ двухъ опредѣлителей легко перейти къ другому. Въ самомъ дѣлѣ вычитая изъ каждой строки опредѣлителя (8) предыдущаго §, предшествующую, мы, не измѣняя величины опредѣлителя нашего, дадимъ ему такой видъ:

$$(9) \qquad V = \begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} & \ldots & v_x^{(n)} \\ \triangle v_x^{(1)} & \triangle v_x^{(2)} & \ldots & \triangle v_x^{(n)} \\ \triangle v_{x+h}^{(1)} & \triangle v_{x+h}^{(2)} & \ldots & \triangle v_{x+h}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \triangle v_{x+\overline{n-2}h}^{(1)} & \triangle v_{x+\overline{n-2}h}^{(2)} & \ldots & \triangle v_{x+\overline{n-2}h}^{(n)} \end{vmatrix};$$

вычитая здѣсь каждую строку, начиная со второй, изъ слѣдующей, мы, не измѣняя величины опредѣлителя, дадимъ такой видъ ему:

$$\begin{vmatrix} v_x^{(1)} & v_x^{(2)} & \ldots & v_x^{(n)} \\ \triangle v_x^{(1)} & \triangle v_x^{(2)} & \ldots & \triangle v_x^{(n)} \\ \triangle^2 v_x^{(1)} & \triangle^2 v_x^{(2)} & \ldots & \triangle^2 v_x^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \triangle^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(1)} & \triangle^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(2)} & \ldots & \triangle^2 v_{x+\overline{n-3}h}^{(n)} \end{vmatrix};$$

продолжая это, мы и придемъ къ опредѣлителю (8) § 156. Отъ этого послѣдняго мы придемъ къ опредѣлителю (8) § 157, *придавая* каждую строчку къ слѣдующей, сперва начиная съ первой, потомъ со второй, и т. д.

159. Покажемъ теперь какимъ образомъ, зная интегралъ линейнаго уравненія n-го порядка безъ послѣдняго члена:

$$K_0\Delta^n u_x + K_1\Delta^{n-1}u_x + \ldots + K_{n-1}\Delta u_x + K_n v_x = 0; \qquad (1)$$

можно будетъ найти, и притомъ при помощи однихъ суммированій, интегралъ полнаго уравненія:

$$K_0\Delta^n u_x + K_1\Delta^{n-1}u_x + \ldots + K_{n-1}\Delta u_x + K_n u_x = Q_x. \qquad (2)$$

Мы видѣли, что общій интегралъ уравненія (1) можно такъ представить:

$$v_x = \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)} v_x^{(i)}; \qquad (3)$$

попробуемъ удовлетворить уравненію (2), принявъ въ этой формулѣ $C^{(i)}$ за нѣкоторыя функціи x, т. е. другими словами,—принявъ:

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_x^{(i)}. \qquad (4)$$

Здѣсь у насъ n неизвѣстныхъ функцій; слѣдовательно $n-1$ условій для ихъ опредѣленія мы можемъ назначить по произволу; остальное же будетъ вытекать изъ условія, что выраженіе (4) должно быть интеграломъ уравненія (2). Взявъ разность отъ (4), будемъ имѣть:

$$\Delta u_x = \sum_{i=1}^{i=n}\left(C_x^{(i)}\Delta v_x^{(i)} + v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}\right); \qquad (5)$$

положивъ теперь

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)} = 0, \qquad (6)$$

мы будемъ имѣть первое условіе для опредѣленія функцій $C_x^{(i)}$, послѣ чего (5) приведется къ такому:

$$\Delta u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)}\Delta v_x^{(i)}, \qquad (7)$$

какъ и въ случаѣ постоянныхъ $C^{(i)}$. Беря разность отъ (7), получимъ:

$$(8)\qquad \Delta^2 u_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} \Delta^2 v_x^{(i)} + \Delta v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} \right);$$

полагая здѣсь:

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \Delta v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0,$$

мы будемъ имѣть второе условіе для опредѣленія функціи $C_x^{(i)}$, и (8) приведемъ къ такому:

$$(10)\qquad \Delta^2 u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} \Delta^2 v_x^{(i)},$$

какъ и въ случаѣ постоянныхъ $C^{(i)}$. Продолжая это, мы дойдемъ до равенства:

$$(11)\qquad \Delta^{n-2} u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} \Delta^{n-2} v_x^{(i)};$$

беря разность, получимъ отсюда:

$$(12)\qquad \Delta^{n-1} u_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} \Delta^{n-1} v_x^{(i)} + \Delta^{n-2} v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} \right);$$

полагая

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \Delta^{n-2} v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0,$$

мы будемъ имѣть $n-1$-ое, слѣдовательно послѣднее условіе, которое мы можемъ назначить по произволу, послѣ чего (12) приведется къ такому:

$$(14)\qquad \Delta^{n-1} u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} \Delta^{n-1} v_x^{(i)},$$

какъ и для $C^{(i)}$ постоянныхъ. Теперь беремъ разность отъ (14) и получаемъ:

$$(15)\qquad \Delta^n u_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} \Delta^n v_x^{(i)} + \Delta^{n-1} v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} \right).$$

Вновя изъ (4), (7), (10), (11), (14) и (15) во (2) и располагая результатъ по $C_x^{(i)}$, мы будемъ имѣть:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)}\left\{K_0\Delta^n v_x^{(i)}+K_1\Delta^{n-1}v_x^{(i)}+\ldots+K_{n-1}\Delta v_x^{(i)}+K_n v_x^{(i)}\right\}+\\&\qquad+K_0\sum_{i=1}^{i=n}\Delta^{n-1}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=Q_x,\end{aligned}\right.\tag{16}$$

а это въ силу того, что $v_x^{(i)}$ суть интегралы уравненія (1), и потому выраженія въ скобкахъ $\{\ \}$ для каждаго (i) въ отдѣльности тождественно равны нулю, приводится къ такому:

$$K_0\sum_{i=1}^{i=n}\Delta^{n-1}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=Q_x,\tag{17}$$

что можно и такъ представить:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Delta^{n-1}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=\frac{Q_x}{K_0}.\tag{18}$$

Это будетъ n-ое условіе, которому должны удовлетворять n искомыхъ функцій $C_x^{(i)}$. Рѣшая систему n линейныхъ относительно $\Delta C_x^{(i)}$ уравненій (6), (9),...(13) и (18), которую мы еще разъ для удобства пишемъ вмѣстѣ:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\&\sum_{i=1}^{i=n}\Delta v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\&\ldots\ldots\ldots\\&\sum_{i=1}^{i=n}\Delta^{(n-2)}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\&\sum_{i=1}^{i=n}\Delta^{(n-1)}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=\frac{Q_x}{K_0},\end{aligned}\right.\tag{19}$$

мы будемъ имѣть:

$$\Delta C_x^{(i)}=\frac{D_{n,i}}{D}\cdot\frac{Q_x}{K_0},\tag{20}$$

гдѣ

(21) $$D=\begin{vmatrix} v_{x+h}^{(1)} & v_{x+h}^{(2)} & \cdots & v_{x+h}^{(n)} \\ \triangle v_{x+h}^{(1)} & \triangle v_{x+h}^{(2)} & \cdots & \triangle v_{x+h}^{(n)} \\ \triangle^2 v_{x+h}^{(1)} & \triangle^2 v_{x+h}^{(2)} & \cdots & \triangle^2 v_{x+h}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \triangle^{n-1} v_{x+h}^{(1)} & \triangle^{n-1} v_{x+h}^{(2)} & \cdots & \triangle^{(n-1)} v_{x+h}^{(n)} \end{vmatrix}$$

и

(22) $$D_{n,i}=\begin{vmatrix} v_{x+h}^{(1)} & \cdots 0^{(i)} \cdots & v_{x+h}^{(n)} \\ \triangle v_{x+h}^{(1)} & \cdots 0 \cdots & \triangle v_{x+h}^{(n)} \\ \triangle^2 v_{x+h}^{(1)} & \cdots 0 \cdots & \triangle^2 v_{x+h}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \triangle^{n-1} v_{x+h}^{(1)} & \cdots 1 \cdots & \triangle^{n-1} v_{2+h}^{(n)} \end{vmatrix};$$

т. е. миноръ, отвѣчающій i-ому элементу послѣдней строки опредѣлителя D. Суммируя (20), мы получимъ

(23) $$C_x^{(i)}=\sum_{\alpha}^{x}\frac{D_{n,i}}{D}\cdot\frac{Q_x}{K_0}+C_i,$$

гдѣ C_i произвольная постоянная въ смыслѣ, объясненномъ въ § (9). Внося это въ (4), будемъ имѣть:

(24) $$u_x=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\sum_{\alpha}^{x}\frac{D_{n,i}}{D}\cdot\frac{Q_x}{K_0}+C_i\right\}v_x^{(i)},$$

или

(25) $$u_x=\sum_{i=0}^{i=n}\left(v_x^{(i)}\sum_{\alpha}^{x}\frac{D_{n,i}}{D}\cdot\frac{Q_x}{K_0}\right)+v_x,$$

гдѣ

(26) $$v_x=\sum_{i=0}^{i=n}C_i v_x^{(i)}$$

есть полный интегралъ уравненія (1), т. е. безъ послѣдняго члена. Итакъ формула (25) намъ говоритъ, что полный интегралъ полнаго линейнаго уравненія n-го порядка (2) получится, если къ частному его интегралу

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_x^{(i)} \sum_{a}^{x} \frac{D_{n,i}}{D} \cdot \frac{Q_x}{K_0} \tag{27}$$

придадимъ полный интегралъ уравненія (1) безъ послѣдняго члена. Что (27) есть частный интегралъ уравненія (2), то это видно изъ того, что онъ получается изъ общаго интеграла (25 или 24), полагая всѣ $C_i = 0$.

160 160. Съ равною, если еще не съ большею легкостью, этотъ способъ нахожденія интеграла полнаго линейнаго уравненія по полному интегралу неполнаго уравненія, принадлежащій Лагранжу и извѣстный подъ названіемъ *способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ*, примѣняется къ линейному разностному уравненію во второй формѣ: зная интегралы уравненія:

$$L_0 v_{x+nh} + L_1 v_{x+\overline{n-1}h} + \dots + L_{n-1} v_{x+h} + L_n v_x = 0\,, \tag{1}$$

мы найдемъ интегралъ и полнаго уравненія

$$L_0 u_{x+nh} + L_1 u_{x+\overline{n-1}h} + \dots + L_{n-1} u_{x+h} + L_n u_x = Q_x. \tag{2}$$

Полный интегралъ уравненія (1) есть:

$$v_x = \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)} v_x^{(i)}\,; \tag{3}$$

попробуемъ удовлетворить (2), принимая здѣсь $C^{(i)}$ за функціи, слѣдовательно полагая

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_x^{(i)}. \tag{4}$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, мы будемъ имѣть:

$$u_{x+h} = \sum_{i=1}^{i=n} C_{x+h}^{(i)} v_{x+h}^{(i)}\,,$$

или

$$u_{x+h} = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_{x+h}^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta C_x^{(i)} \cdot v_{x+h}^{(i)}\,; \tag{5}$$

полагая здѣсь

(6) $$\sum_{i=1}^{i=n} v_{x+h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0 ,$$

мы приведемъ (5) къ такому:

(7) $$u_{x+h} = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_{x+h}^{(i)} ,$$

какъ будто C суть постоянныя. Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, мы получимъ:

(8) $$u_{x+2h} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} + \Delta C_x^{(i)} \right) v_{x+2h}^{(i)} ,$$

или, полагая

(9) $$\sum_{i=1}^{i=n} v_{x+2h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0 ,$$

такое:

(10) $$u_{x+2h} = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_{x+2h}^{(i)} ,$$

опять какъ будто C были бы постоянныя. Продолжая такъ поступать, мы придемъ къ такому равенству:

(11) $$u_{x+\overline{n-1}h} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_x^{(i)} + \Delta C_x^{(i)} \right) v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)} ;$$

полагая

(12) $$\sum_{i=1}^{i=n} v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)} \Delta C_x^{(i)} = 0 ,$$

—это будетъ $n-1$-ое условіе, мы приведемъ (11) къ такому:

(13) $$u_{x+\overline{n-1}h} = \sum_{i=1}^{i=n} C_x^{(i)} v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)} .$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, мы получимъ:

$$u_{x+nh}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(C_x^{(i)}+\Delta C_x^{(i)}\right)v_{x+nh}^{(i)}. \tag{14}$$

Внося изъ (7), (10), (13) и (14) во (2) и располагая по $C_x^{(i)}$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{i=n}C_x^{(i)}\left\{L_0v_{x+nh}^{(i)}+L_1v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)}+\ldots+L_nv_x^{(i)}\right\}+\\ \qquad+L_0\sum\limits_{i=1}^{i=n}v_{x+nh}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=Q_x;\end{array}\right\} \tag{15}$$

въ силу того, что $v_x^{(i)}$ суть рѣшенія уравненія (1), выраженія въ { } при каждомъ $C_x^{(i)}$ въ отдѣльности будутъ тождественно равны нулю, а потому уравненіе (15) (по раздѣленіи еще на L_0,) приведется къ такому:

$$\sum_{i=1}^{i=n}v_{x+nh}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=\frac{Q_x}{L_0}. \tag{16}$$

Рѣшая систему уравненій (6), (9)... (12) и (16), которую еще разъ переписываемъ:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{i=n}v_{x+h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{i=n}v_{x+2h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{i=1}^{i=n}v_{x+\overline{n-1}h}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{i=n}v_{x+nh}^{(i)}\Delta C_x^{(i)}=\dfrac{Q_x}{L_0},\end{array}\right\} \tag{17}$$

по $\Delta C_x^{(i)}$, мы получимъ:

$$\Delta C_x^{(i)}=\frac{D_{n,i}^{(1)}}{D^{(1)}}\cdot\frac{Q_x}{L_0}, \tag{18}$$

гдѣ

(19)
$$D^{(1)}=\begin{vmatrix} v^{(1)}_{x+h} & v^{(2)}_{x+h} & \dots & v^{(n)}_{x+h} \\ v^{(1)}_{x+2h} & v^{(2)}_{x+2h} & \dots & v^{(n)}_{x+2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v^{(1)}_{x+nh} & v^{(2)}_{x+nh} & \dots & v^{(n)}_{x+nh} \end{vmatrix}$$

и

(20)
$$D^{(1)}_{n,i}=\begin{vmatrix} v^{(1)}_{x+h} & \dots & 0^{(i)} & \dots & v^{(n)}_{x+h} \\ v^{(1)}_{x+2h} & \dots & 0 & \dots & v^{(1)}_{x+2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v^{(1)}_{x+nh} & \dots & 1 & \dots & v^{(n)}_{x+nh} \end{vmatrix}$$

Изъ (18) чрезъ суммированіе находимъ:

(21)
$$C^{(i)}_x=\sum_\alpha^x \frac{D^{(1)}_{n,i}}{D^{(1)}}\frac{Q_x}{L_0}+C_i,$$

гдѣ C_i постоянныя въ смыслѣ § 9. Слѣдовательно, внося это въ (4), будемъ имѣть:

(22)
$$C^{(i)}_x=\sum_{i=1}^{i=n} v^{(i)}_x \sum_\alpha^x \frac{D^{(1)}_{n,i}}{D^{(1)}}\frac{Q_x}{L_0}+v_x,$$

гдѣ v_x опредѣляется изъ (3).

Здѣсь полезно замѣтить, что $D^{(1)}=D$ и $D^{(1)}_{n,i}=D_{n,i}$, въ чемъ можно убѣдиться, какъ и въ § 158; далѣе $L_0=K_0$, какъ не трудно это увидѣть, переходя отъ уравненія (1) предыдущаго § къ (1) настоящаго; слѣдовательно рѣшеніе (22) тождественно съ рѣшеніемъ (25) предыдущаго §, какъ оно и должно быть, если (2) этого § есть преобразованіе (2) предыдущаго §.

161. Показавъ, какъ по полному интегралу уравненія безъ послѣдняго члена находится общій интегралъ полнаго уравненія, переходимъ теперь къ спеціальному разсмотрѣнію линейныхъ уравненій безъ послѣдняго члена съ постоянными коэффиціентами, слѣдовательно,—если взять вторую форму, уравненій вида:

(1)
$$A_0 u_{x+nh}+A_1 u_{x+\overline{n-1}h}+\dots+A_{n-1}u_{x+h}+A_n u_x=0,$$

гдѣ A_0, $A_1 \dots A_n$ суть постоянныя величины: мы отдаемъ предпочтеніе этой формѣ линейнаго разностнаго уравненія передъ первою, потому, что въ ней дѣло изслѣдованія идетъ проще. Попробуемъ удовлетворить этому уравненію, положивъ:

$$u_x = a^{\frac{x}{k}} \tag{2}$$

гдѣ a пока неопредѣленная постоянная. Отсюда имѣемъ:

$$u_{x+mk} = a^{\frac{x}{k}+m}; \quad [m = 1, 2, 3 \dots n] \tag{3}$$

внося это въ (1) и беря $a^{\frac{x}{k}}$, какъ общій множитель всѣхъ членовъ, за скобки, мы будемъ имѣть:

$$a^{\frac{x}{k}} \left\{ A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \dots + A_{n-1} a + A_n \right\} = 0, \tag{4}$$

или, полагая:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n, \tag{5}$$

слѣдующее:

$$a^{\frac{x}{k}} f(a) = 0. \tag{6}$$

Но $a^{\frac{x}{n}}$ не $= 0$ для конечныхъ значеній x; слѣдовательно должно быть

$$f(a) = 0, \tag{7}$$

т. е. искомыя значенія a суть корни этого уравненія. Если всѣ эти корни различныя, то найдя ихъ,—пусть они будутъ

$$a_1, a_2, \dots a_n, \tag{8}$$

мы будемъ имѣть по § 157 общій интегралъ уравненія, составивъ выраженіе:

$$u_x = \sum_{i=1}^{i=n} C_i a_i^{\frac{x}{k}}, \tag{9}$$

гдѣ C_i суть произвольныя постоянныя въ смыслѣ § 9.

162. Если же уравненіе (7) предыдущаго § имѣетъ равные корни, то это выраженіе (9) уже не будетъ общимъ интеграломъ, ибо члены, от-

вѣчающіе равнымъ корнямъ, могутъ быть соединены въ одинъ, и соотвѣтственныя произвольныя постоянныя сложатся въ одну, такъ что общее число ихъ будетъ потому менѣе чѣмъ n.

Въ этомъ случаѣ недостающія частныя рѣшенія такъ найдутся. Мы имѣемъ вставляя $a^{\frac{x}{h}}$, гдѣ a совершенно произвольная величина, вмѣсто u_x въ первую часть уравненія (1) предыдущаго §, такое тождество:

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 a^{\frac{x}{h}+n} + A_1 a^{\frac{x}{h}+n-1} + A_2 a^{\frac{x}{h}+n-2} + \ldots + \\ \qquad + A_{n-1} a^{\frac{x}{h}+1} + A_n a^{\frac{x}{h}} = a^{\frac{x}{h}} f(a), \end{cases}$$

[на основаніи (3) и (5) предыдущаго §]; дифференцируя это тождество по a и умножая результатъ на a, мы получимъ:

$$(2)\quad \begin{cases} A_0 a^{\frac{x}{h}+n}\left(\frac{x}{h}+n\right) + A_1 a^{\frac{x}{h}+n-1}\left(\frac{x}{h}+n-1\right) + \ldots + \\ \qquad + A_{n-1} a^{\frac{x}{h}+1}\left(\frac{x}{h}+1\right) + A_n a^{\frac{x}{h}} \frac{x}{h} = \\ \qquad = \frac{x}{h} a^{\frac{x}{h}} f(a) + a^{\frac{x}{h}+1} f'(a) \end{cases}$$

дѣлая тоже съ этимъ тождествомъ, получимъ:

$$(3)\quad \begin{cases} A_0 a^{\frac{x}{h}+n}\left(\frac{x}{h}+n\right)^2 + A_1 a^{\frac{x}{h}+n-1}\left(\frac{x}{h}+n-1\right)^2 + \ldots + \\ \qquad + A_{n-1} a^{\frac{x}{h}+1}\left(\frac{x}{h}+1\right)^2 + A_n a^{\frac{x}{h}} \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \\ = \left(\frac{x}{h}\right)^2 a^{\frac{x}{h}} f(a) + \left(2\frac{x}{h}+1\right) a^{\frac{x}{h}+1} f'(a) + a^{\frac{x}{h}+2} f''(a); \end{cases}$$

повторяя это μ разъ, придемъ къ такому результату:

$$(4)\quad \begin{cases} A_0 a^{\frac{x}{h}+n}\left(\frac{x}{h}+n\right)^{\mu} + A_1 a^{\frac{x}{h}+n-1}\left(\frac{x}{h}+n-1\right)^{\mu} + \ldots + \\ \qquad + A_{n-1} a^{\frac{x}{h}+1}\left(\frac{x}{h}+1\right)^{\mu} + A_n a^{\frac{x}{h}} \left(\frac{x}{h}\right)^{\mu} = \\ = \left(\frac{x}{h}\right)^{\mu} a^{\frac{x}{h}} f(a) + \varphi_1(x) a^{\frac{x}{h}+1} f'(a) + \varphi_2(x) a^{\frac{x}{h}+2} f''(a) + \\ \qquad + \ldots + \varphi_{\mu}(x) f^{(\mu)}(a), \end{cases}$$

гдѣ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots\varphi_\mu(x)$ суть цѣлыя функціи x. Если теперь a, бывшее до сихъ поръ какимъ угодно количествомъ, сдѣлается равнымъ какому либо m-кратному корню уравненія

$$f(a)=0\,, \tag{5}$$

то тогда будутъ равны нулю и производныя до порядка $m-1$ включительно:

$$f'(a)=0\,,\quad f''(a)=0\ldots f^{(m-1)}(a)=0\,, \tag{6}$$

и изъ (4) для $\mu=0\,,1\,,2\,,3\ldots m-1$ будетъ слѣдовать, что

$$a^{\frac{x}{h}}\,;\quad a^{\frac{x}{h}}\cdot\frac{x}{h}\,;\quad a^{\frac{x}{h}}\left(\frac{x}{h}\right)^2\,;\quad a^{\frac{x}{h}}\left(\frac{x}{h}\right)^3\,;\ldots a^{\frac{x}{h}}\left(\frac{x}{h}\right)^{m-1}\,, \tag{7}$$

будутъ частными рѣшеніями уравненія (1), а слѣдовательно и такая комбинація ихъ:

$$a^{\frac{x}{h}}\left\{C+C_1\frac{x}{h}+C_2\left(\frac{x}{h}\right)^2+\ldots+C_m\left(\frac{x}{h}\right)^{m-1}\right\}, \tag{8}$$

гдѣ C, C_1, $C_2\ldots C_m$ суть произвольныя постоянныя. Такимъ образомъ каждому m-кратному корню будетъ отвѣчать рѣшеніе съ m произвольными постоянными, опредѣляемое формулою (8).

163. Можно найти еще другія частныя рѣшенія отвѣчающія m-кратному корню уравненія (5) предыдущаго §. Дифференцируя тождество (1) μ разъ по a,—вторую часть по формулѣ Лейбница, мы получимъ такое тождество:

$$\left.\begin{aligned}
&A_0a^{\frac{x}{h}+n-\mu}\left(\frac{x}{h}+n\right)\left(\frac{x}{h}+n-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}+n-\mu+1\right)+\\
&+A_1a^{\frac{x}{h}+n-\mu-1}\left(\frac{x}{h}+n-1\right)\left(\frac{x}{h}+n-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}+n-\mu\right)+\\
&+A_2a^{\frac{x}{h}+n-\mu-2}\left(\frac{x}{h}+n-2\right)\left(\frac{x}{h}+n-3\right)\ldots\left(\frac{x}{h}+n-\mu-1\right)+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+A_{n-1}a^{\frac{x}{h}-\mu+1}\left(\frac{x}{h}+1\right)\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-\mu+2\right)+\\
&+A_na^{\frac{x}{h}-\mu}\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-\mu+1\right)=\\
&=\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-\mu+1\right)a^{\frac{x}{h}-\mu}f(a)+\\
&+C_1^{\mu}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-\mu+2\right)a^{\frac{x}{h}-\mu+1}f'(a)+\\
&+\ldots\ldots\ldots+\\
&+a^{\frac{x}{h}}f^{(\mu)}(a)\,;
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

помножая это на a^x, мы изъ этого тождества убѣждаемся, что въ случаѣ $a=m$-кратному корню уравненія (5) предыдущаго §. уравненію (1) того же § будутъ удовлетворять и рѣшенія

$$(2)\quad \begin{cases} u_x = a^{\frac{x}{h}} \dfrac{x}{h}\left(\dfrac{x}{h}-1\right)\cdots\left(\dfrac{x}{h}-\mu+1\right)= \\ \qquad\qquad = a^{\frac{x}{h}} \dfrac{x^{(\mu|h)}}{h^{\mu}}\,, \end{cases}$$

гдѣ $\mu=0, 1, 2, 3 \ldots m-1$, чрезъ что восполняется недостающая система интеграловъ въ случаѣ m-кратнаго корня уравненія (5) предыдущаго § также хорошо, какъ и съ помощію интеграловъ (7) предыдущаго §. Легко видѣть, что рѣшенія (2) настоящаго § суть частные виды (8) предыдущаго §. Наоборотъ (7) предыдущаго § можно выразить линейными функціями рѣшеній (2) настоящаго §.

Помножая каждую изъ функцій (2) на C_μ и суммируя по μ отъ 0 до $m-1$, будемъ имѣть такое рѣшеніе, заключающее m произвольныхъ постоянныхъ:

$$(3)\quad a^{\frac{x}{h}} \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} C_\mu \frac{x^{(\mu|h)}}{h^\mu}\,.$$

164. **164.** Если нѣкоторые корни уравненія

$$(1)\quad f(a)=0$$

будутъ комплексные, то найденныя по способу предыдущихъ §§ частныя рѣшенія разностнаго уравненія (1) § 161 будутъ имѣть комплексный видъ, а слѣдовательно и общій интегралъ будетъ имѣть такой же видъ; всегда однако—когда коэффиціенты уравненія даннаго, а слѣдовательно и (1) настоящаго § вещественные, можно замѣнить ихъ вещественными рѣшеніями, заключающими тоже число произвольныхъ постоянныхъ. Дѣйствительно, если

$$(2)\quad a_1=\alpha+\beta i\,,$$

то будетъ и другой корень, сопряженный съ этимъ:

$$(3)\quad a_2=\alpha-\beta i\,;$$

часть общаго интеграла, зависящая отъ нихъ, будетъ:

$$(4)\quad C_1(\alpha+\beta i)^{\frac{x}{h}}+C_2(\alpha-\beta i)^{\frac{x}{h}}.$$

Дадимъ приведенную форму корнямъ a_1 и a_2, положивъ:

$$a_1 = \alpha + \beta i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \tag{5}$$

тогда

$$a_2 = \alpha - \beta i = r(\cos\varphi - i\sin\varphi); \tag{6}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} \left(\alpha + \beta i\right)^{\frac{x}{h}} &= r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} + i\sin\varphi\frac{x}{h}\right), \\ \left(\alpha - \beta i\right)^{\frac{x}{h}} &= r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} - i\sin\varphi\frac{x}{h}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

внося это въ (4), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} C_1 r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} + i\sin\varphi\frac{x}{h}\right) + C_2 r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} - i\sin\varphi\frac{x}{h}\right) = \\ = r^{\frac{x}{h}}\left\{\left(C_1 + C_2\right)\cos\varphi\frac{x}{h} + \left(C_1 - C_2\right)i\sin\varphi\frac{x}{h}\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

полагая

$$C_1 + C_2 = A\ ;\ (C_1 - C_2)i = B, \tag{9}$$

мы дадимъ этому рѣшенію такой видъ:

$$r^{\frac{x}{h}}\left\{A\cos\frac{\varphi x}{h} + B\sin\frac{\varphi x}{h}\right\}. \tag{10}$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned} A &= C\cos\frac{\gamma}{h}, \\ B &= -\ C\sin\frac{\gamma}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то предыдущее рѣшеніе такъ представится:

$$Cr^{\frac{x}{h}}\cos\left(\frac{\varphi x + \gamma}{h}\right), \tag{12}$$

что вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ A и B содержитъ произвольныя постоянныя C и γ.

165. Если бы $a_1 = \alpha + \beta i$ было бы m — кратнымъ корнемъ уравненія (1), то такой же кратности былъ бы и сопряженный съ нимъ корень $a_2 = \alpha - \beta i$; а потому часть общаго интеграла, зависящая отъ этихъ корней, будетъ первоначально имѣть такой видъ:

*

помножая это на a^{μ}, мы изъ этого тождества убѣждаемся, что въ случаѣ $a=m$-кратному корню уравненія (5) предыдущаго §, уравненію (1) того же § будутъ удовлетворять и рѣшенія

$$(2)\qquad \begin{cases} u_x=a^{\frac{x}{h}}\dfrac{x}{h}\left(\dfrac{x}{h}-1\right)\cdots\left(\dfrac{x}{h}-\mu+1\right)= \\ \qquad\qquad =a^{\frac{x}{h}}\dfrac{x^{(\mu|h)}}{h^{\mu}}\,, \end{cases}$$

гдѣ $\mu=0, 1, 2, 3\ldots m-1$, чрезъ что восполняется недостающая система интеграловъ въ случаѣ m-кратнаго корня уравненія (5) предыдущаго § также хорошо, какъ и съ помощію интеграловъ (7) предыдущаго §. Легко видѣть, что рѣшенія (2) настоящаго § суть частные виды (8) предыдущаго §. Наоборотъ (7) предыдущаго § можно выразить линейными функціями рѣшеній (2) настоящаго §.

Помножая каждую изъ функцій (2) на C_{μ} и суммируя по μ отъ 0 до $m-1$, будемъ имѣть такое рѣшеніе, заключающее m произвольныхъ постоянныхъ:

$$(3)\qquad a^{\frac{x}{h}}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} C_{\mu}\frac{x^{(\mu|h)}}{h^{\mu}}.$$

164. Если нѣкоторые корни уравненія

$$(1)\qquad f(a)=0$$

будутъ комплексные, то найденныя по способу предыдущихъ §§ частныя рѣшенія разностнаго уравненія (1) § 161 будутъ имѣть комплексный видъ, а слѣдовательно и общій интегралъ будетъ имѣть такой же видъ; всегда однако—когда коэффиціенты уравненія даннаго, а слѣдовательно и (1) настоящаго § вещественные, можно замѣнить ихъ вещественными рѣшеніями, заключающими тоже число произвольныхъ постоянныхъ. Дѣйствительно, если

$$(2)\qquad a_1=\alpha+\beta i,$$

то будетъ и другой корень, сопряженный съ этимъ:

$$(3)\qquad a_2=\alpha-\beta i;$$

часть общаго интеграла, зависящая отъ нихъ, будетъ:

$$(4)\qquad C_1(\alpha+\beta i)^{\frac{x}{h}}+C_2(\alpha-\beta i)^{\frac{x}{h}}.$$

Дадимъ приведенную форму корнямъ a_1 и a_2, положивъ:

$$a_1 = \alpha + \beta i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \tag{5}$$

тогда

$$a_2 = \alpha - \beta i = r(\cos\varphi - i\sin\varphi); \tag{6}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} \left(\alpha+\beta i\right)^{\frac{x}{h}} &= r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} + i\sin\varphi\frac{x}{h}\right), \\ \left(\alpha-\beta i\right)^{\frac{x}{h}} &= r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} - i\sin\varphi\frac{x}{h}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

внося это въ (4), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} C_1 r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} + i\sin\varphi\frac{x}{h}\right) + C_2 r^{\frac{x}{h}}\left(\cos\varphi\frac{x}{h} - i\sin\varphi\frac{x}{h}\right) = \\ = r^{\frac{x}{h}}\left\{\left(C_1+C_2\right)\cos\varphi\frac{x}{h} + \left(C_1-C_2\right)i\sin\varphi\frac{x}{h}\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

полагая

$$C_1 + C_2 = A\ ;\ (C_1 - C_2)i = B, \tag{9}$$

мы дадимъ этому рѣшенію такой видъ:

$$r^{\frac{x}{h}}\left\{A\cos\frac{\varphi x}{h} + B\sin\frac{\varphi x}{h}\right\}. \tag{10}$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned} A &= C\cos\frac{\gamma}{h}, \\ B &= -C\sin\frac{\gamma}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

то предыдущее рѣшеніе такъ представится:

$$Cr^{\frac{x}{h}}\cos\left(\frac{\varphi x + \gamma}{h}\right), \tag{12}$$

что вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ A и B содержитъ произвольныя постоянныя C и γ.

165. Если бы $a_1 = \alpha + \beta i$ было бы m — кратнымъ корнемъ уравненія (1), то такой же кратности былъ бы и сопряженный съ нимъ корень $a_2 = \alpha - \beta i$; а потому часть общаго интеграла, зависящая отъ этихъ корней, будетъ первоначально имѣть такой видъ:

*

(1) $$(\alpha+\beta i)^{\frac{x}{h}}\sum_{k=0}^{k=m-1} C_k\left(\frac{x}{h}\right)^k+(\alpha-\beta i)^{\frac{x}{h}}\sum_{k=0}^{k=m-1} C'_k\left(\frac{x}{h}\right)^k;$$

при помощи же (7) предыдущаго § это приведется къ такому:

(2) $$\left\{\begin{aligned} & r^{\frac{x}{h}}\left\{\cos\frac{\varphi x}{h}\sum_{k=0}^{k=m-1}(C_k+C'_k)\left(\frac{x}{h}\right)^k+\right. \\ & \left.\quad+\sin\frac{\varphi x}{h}\sum_{k=0}^{k=m-1}(C_k-C'_k)i\left(\frac{x}{h}\right)^k\right\}; \end{aligned}\right.$$

или, полагая:

(3) $$\left.\begin{aligned} C_k+C'_k&=A_k; \\ (C_k-C'_k)i&=B_k, \end{aligned}\right\}[k=0,1,2\ldots m-1]$$

къ такому:

(4) $$r^{\frac{x}{h}}\left\{\cos\frac{\varphi x}{h}\sum_{k=0}^{k=m-1}A_k\left(\frac{x}{h}\right)^k+\sin\frac{\varphi x}{h}\sum_{k=0}^{k=m-1}B_k\left(\frac{x}{h}\right)^k\right\}.$$

Полагая же

(5) $$\left.\begin{aligned} A_k&=C^{(k)}\cos\frac{\gamma_k}{h}; \\ B_k&=-C^{(k)}\sin\frac{\gamma_k}{h}, \end{aligned}\right\}[k=0,1,2\ldots m-1]$$

мы можемъ этому выраженію дать слѣдующій видъ:

(6) $$r^{\frac{x}{h}}\sum_{k=0}^{k=m-1}C^{(k)}\left(\frac{x}{h}\right)^k\cos\left(\frac{\varphi x+\gamma_k}{h}\right);$$

это выраженіе вмѣсто $2m$ произвольныхъ постоянныхъ A_k и B_k содержитъ произвольныя постоянныя $C^{(k)}$ и γ_k въ томъ же числѣ $2m$. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ намъ удается представить часть интеграла, зависящую отъ m-кратной сопряженной пары корней, въ видѣ вещественной функціи x, содержащей полное число $2m$ произвольныхъ постоянныхъ.

166\. 166. Пояснимъ изложенную теорію линейныхъ разностныхъ уравненій высшаго порядка нѣсколькими примѣрами. Пусть дано уравненіе:

(1) $$u_{x+2}-5u_{x+1}+6u_x=x;$$

найдемъ сперва интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$v_{x+2} - 5v_{x+1} + 6v_x = 0. \tag{2}$$

Такъ какъ коэффиціенты этого уравненія суть постоянныя величины, то положимъ

$$v_x = a^x; \tag{3}$$

тогда получимъ такое уравненіе:

$$a^2 - 5a + 6 = 0, \tag{4}$$

рѣшая которое, находимъ

$$a_1 = +2; \qquad a_2 = +3; \tag{5}$$

слѣдовательно общій интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена (2) будетъ:

$$v_x = C^{(1)} 2^x + C^{(2)} 3^x. \tag{6}$$

Попытаемся теперь удовлетворить уравненію (1), принявъ

$$u_x = C_x^{(1)} 2^x + C_x^{(2)} 3^x; \tag{7}$$

отсюда получимъ:

$$u_{x+1} = C_{x+1}^{(1)} 2^{x+1} + C_{x+1}^{(2)} 3^{x+1} =$$
$$= C_x^{(1)} 2^{x+1} + C_x^{(2)} 3^{x+1} + 2^{x+1} \Delta C_x^{(1)} + 3^{x+1} \Delta C_x^{(2)};$$

полагая здѣсь

$$2^{x+1} \Delta C_x^{(1)} + 3^{x+1} \Delta C_x^{(2)} = 0, \tag{8}$$

будемъ имѣть:

$$u_{x+1} = C_x^{(1)} 2^{x+1} + C_x^{(2)} 3^{x+1}, \tag{9}$$

а отсюда

$$u_{x+2} = C_{x+1}^{(1)} 2^{x+2} + C_{x+1}^{(2)} 3^{x+2},$$

или

$$u_{x+2} = C_x^{(1)} 2^{x+2} + C_x^{(2)} 3^{x+2} + 2^{x+2} \Delta C_x^{(1)} + 3^{x+2} \Delta C_x^{(2)}. \tag{10}$$

Изъ (9) и (10) внося въ (1), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{c} C_x^{(1)} \left[2^{x+2} - 5.2^{x+1} + 6.2^x\right] + C_x^{(2)} \left[3^{x+2} - 5.3^{x+1} + 6.3^x\right] + \\ + 2^{x+2} \Delta C_x^{(1)} + 3^{x+2} \Delta C_x^{(2)} = x; \end{array}\right\} \tag{11}$$

но выраженія въ [ ], то и другое, равны нулю, (какъ не трудно повѣрить на самомъ дѣлѣ,) ибо 2^x и 3^x суть интегралы уравненія (2); а потому (10) приведется къ такому:

$$2^{x+2}\Delta C_x^{(1)} + 3^{x+2}\Delta C_x^{(2)} = x; \tag{12}$$

изъ уравненій (8) и (12) мы и найдемъ $\Delta C_x^{(1)}$ и $\Delta C_x^{(2)}$. Полагая въ (8) и (12)

$$2^{x+1}\Delta C_x^{(1)} = \xi; \qquad 3^{x+1}\Delta C_x^{(2)} = \eta, \tag{13}$$

мы будемъ имѣть для опредѣленія этихъ величинъ такую систему уравненій:

$$\left\{\begin{aligned} \xi + \eta &= 0; \\ 2\xi + 3\eta &= x, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

откуда найдемъ

$$\xi = -x;$$
$$\eta = +x;$$

а отсюда на основаніи (13) получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta C_x^{(1)} &= -x . 2^{-x-1}; \\ \Delta C_x^{(2)} &= +x . 3^{-x-1}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Суммируя, получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} C_x^{(1)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^x (x+1) + C_1; \\ C_x^{(2)} &= -\frac{2x+1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x + C_2, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

и внося это въ (7), послѣ преобразованія получимъ:

$$u_x = \frac{2x+3}{4} + C_1 2^x + C_2 3^x. \tag{17}$$

167. Пусть дано еще уравненіе:

$$u_{x+2} - 4u_{x+1} + 4u_x = x; \tag{1}$$

найдемъ сперва интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$v_{x+2} - 4v_{x+1} + 4v_x = 0; \tag{2}$$

такъ какъ коэффиціенты его суть постоянныя величины, то полагаемъ:

$$v_x = a^x ; \tag{3}$$

тогда для опредѣленія a будемъ имѣть такое уравненіе:

$$a^2 - 4a + 4 = 0 , \tag{4}$$

которое имѣетъ двукратный корень $a=2$, [ибо первая часть его $=(a-2)^2$;] слѣдовательно общій интегралъ уравненія (2) по формулѣ (8) § 162 будетъ

$$v_x = 2^x\left(C^{(1)} + C^{(2)}x\right). \tag{5}$$

Попробуемъ теперь удовлетворить уравненію (1), полагая

$$u_x = 2^x\left(C_x^{(1)} + C_x^{(2)}x\right) ; \tag{6}$$

тогда будетъ

$$u_{x+1} = 2^{x+1}\left(C_x^{(1)} + C_x^{(2)}(x+1)\right) , \tag{7}$$

когда положимъ

$$\Delta C_x^{(1)} + (x+1)\Delta C_x^{(2)} = 0 ; \tag{8}$$

изъ (7) послѣ этого находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u_{x+2} = 2^{x+2}\left(C_x^{(1)} + C_x^{(2)}(x+2)\right) + \\ + 2^{x+2}\left(\Delta C_x^{(1)} + (x+2)\Delta C_x^{(2)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Внося изъ (7) и (9) въ (1), получимъ по сокращеніи:

$$2^{x+2}\left(\Delta C_x^{(1)} + (x+2)\Delta C_x^{(2)}\right) = x , \tag{10}$$

откуда получимъ такое уравненіе:

$$\Delta C_x^{(1)} + (x+2)\Delta C_x^{(1)} = x2^{-x-2}. \tag{11}$$

Вычитая уравненіе (8) изъ (11), будемъ имѣть:

$$\Delta C_x^{(2)} = x2^{-x-2} , \tag{12}$$

откуда получимъ:

(13) $$C_x^{(2)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}(x+1) + C_2.$$

Изъ (8) получаемъ:

$$\Delta C_x^{(1)} = -(x+1)\Delta C_x^{(2)},$$

и на основаніи (12):

(14) $$\Delta C_x^{(1)} = -\frac{1}{4}(x+1)x\left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

суммируя, получимъ:

(15) $$C_x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}(x^2+3x+4) + C_1;$$

внося изъ (15) и (13) въ (6), будемъ имѣть послѣ всѣхъ упрощеній:

(16) $$u_x = x + 2 + (C_1 + C_2 x) . 2^x .$$

168. 168. Возьмемъ еще такое уравненіе:

(1) $$u_{x+2} + u_x = \cos \beta x .$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

(2) $$v_{x+2} + v_x = 0;$$

полагая въ немъ

$$v_x = a^x,$$

будемъ имѣть для опредѣленія a такое уравненіе:

(3) $$a^2 + 1 = 0,$$

откуда найдемъ:

(4) $$a = \pm\sqrt{-1};$$

а потому общій интегралъ уравненія (2) будетъ:

(5) $$v_x = C^{(1)}(+\sqrt{-1})^x + C^{(2)}(-\sqrt{-1})^x .$$

Но

(6) $$\pm\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi}{2} \pm i \sin\frac{\pi}{2},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$; слѣдовательно

$$v_x = C^{(1)}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + i\sin\frac{\pi x}{2}\right) + C^{(2)}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - i\sin\frac{\pi x}{2}\right), \qquad (7)$$

или, полагая $C^{(1)} + C^{(2)} = A$; $(C^{(1)} - C^{(2)})i = B$,

$$v_x = A\cos\frac{\pi x}{2} + B\sin\frac{\pi x}{2}, \qquad (8)$$

гдѣ A и B, какъ и $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ произвольныя постоянныя. Попробуемъ теперь удовлетворить уравненію (1), принимая здѣсь A и B за функціи x, т. е. полагая въ (1)

$$u_x = A_x\cos\frac{\pi x}{2} + B_x\sin\frac{\pi x}{2}. \qquad (9)$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+1$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} u_{x+1} = A_x\cos\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right) + B_x\sin\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right) + \\ + \cos\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right)\triangle A_x + \sin\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right)\triangle B_x, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

и полагая

$$\cos\frac{\pi x+\pi}{2}\triangle A_x + \sin\frac{\pi x+\pi}{2}\triangle B_x = 0, \qquad (11)$$

окончательно:

$$u_{x+1} = A_x\cos\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right) + B_x\sin\left(\frac{\pi x+\pi}{2}\right); \qquad (12)$$

перемѣняя здѣсь x на $x+1$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} u_{x+2} = A_x\cos\left(\frac{\pi x+2\pi}{2}\right) + B_x\sin\left(\frac{\pi x+2\pi}{2}\right) + \\ + \cos\left(\frac{\pi x+2\pi}{2}\right)\triangle A_x + \sin\left(\frac{\pi x+2\pi}{2}\right)\triangle B_x \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

или

$$\left.\begin{aligned} u_{x+2} = -A_x\cos\frac{\pi x}{2} - B_x\sin\frac{\pi x}{2} - \\ - \cos\frac{\pi x}{2}\triangle A_x - \sin\frac{\pi x}{2}\triangle B_x. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Внося изъ (9) и (14) въ (1), будемъ имѣть по сокращеніи:

(15) $$-\cos\frac{\pi x}{2}\Delta A_x - \sin\frac{\pi x}{2}\Delta B_x = \cos\beta x.$$

Изъ этого уравненія и (11) и найдемъ ΔA_x и ΔB_x. Очевидно эти уравненія можно такъ представить:

(16) $$\begin{cases} -\sin\frac{\pi x}{2}\Delta A_x + \cos\frac{\pi x}{2}\Delta B_x = 0, \\ \cos\frac{\pi x}{2}\Delta A_x + \sin\frac{\pi x}{2}\Delta B_x = -\cos\beta x; \end{cases}$$

отсюда получаемъ:

(17) $$\begin{cases} \Delta A_x = -\cos\frac{\pi x}{2}\cos\beta x; \\ \Delta B_x = -\sin\frac{\pi x}{2}\cos\beta x, \end{cases}$$

или:

(18) $$\begin{cases} \Delta A_x = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)x + \cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)x\right], \\ \Delta B_x = -\frac{1}{2}\left[\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)x - \sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)x\right]; \end{cases}$$

суммируя по формулѣ (5) и (6) § 105, найдемъ:

(20) $$\begin{cases} A_x = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\left[\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{\beta+\frac{\pi}{2}+\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)} + \frac{\cos\left[\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{\beta-\frac{\pi}{2}+\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\beta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right\} + C_1, \\ B_x = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{\beta+\frac{\pi}{2}+\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)} - \frac{\sin\left[\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{\beta-\frac{\pi}{2}+\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\beta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right\} + C_2, \end{cases}$$

или

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}+C_1, \\ B_x &= +\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}+C_2, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

или еще:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\right\}+C_1, \\ B_x &= +\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\right\}+C_2. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Внося это въ (9), получимъ послѣ нѣкоторыхъ легкихъ упрощеній:

$$\left.\begin{aligned} u_x = \frac{1}{4}&\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\beta x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+\beta x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\right\}+ \\ &+C_1\cos\frac{\pi x}{2}+C_2\sin\frac{\pi x}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Выраженіе въ скобкахъ можно такъ представить:

$$\left.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\beta x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\beta x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{2\cos\left(\beta(x-1)\right)}{\cos\beta};\right\} \quad (24)$$

а потому окончательно будетъ:

$$u_x=\frac{\cos[\beta(x-1)]}{2\cos\beta}+C_1\cos\frac{\pi x}{2}+C_2\sin\frac{\pi x}{2}. \quad (25)$$

Перемѣняя здѣсь для повѣрки x на $x+2$, будемъ имѣть:

(26) $$u_{x+2} = \frac{\cos[\beta(x+1)]}{2\cos\beta} - C_1 \cos\frac{\pi x}{2} - C_2 \cos\frac{\pi x}{2};$$

складывая съ предыдущимъ, будемъ имѣть:

(27) $$u_{x+2} + u_x = \frac{\cos[\beta(x+1)] + \cos[\beta(x-1)]}{2\cos\beta} = \cos\beta x,$$

(такъ какъ

(28) $$\cos[\beta(x+1)] + \cos[\beta(x-1)] = \cos\beta x \cdot \cos\beta,)$$

что согласно съ даннымъ уравненіемъ (1).

169. Примѣнимъ теорію линейныхъ разностныхъ уравненій къ рѣшенію такой задачи:

Найти общій видъ числителей и знаменателей подходящихъ дробей такой непрерывной дроби:

(1) $$S = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{и т. д. до безконечности.}}}}$$

Первыя подходящія дроби будутъ:

(2) $$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{3}{2}; \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{5}{3}, \text{ и т. д.}$$

Числители и знаменатели трехъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей связаны всегда такими уравненіями:

(3) $$\begin{cases} P_{m+2} = P_{m+1} q_{m+1} + P_m; \\ Q_{m+2} = Q_{m+1} q_{m+1} + Q_m; \end{cases}$$

для дроби (1) всѣ $q_{m+1} = 1$; а потому эти уравненія принимаютъ такой видъ:

(4) $$\begin{cases} P_{m+2} = P_{m+1} + P_m, \\ Q_{m+2} = Q_{m+1} + Q_m, \end{cases}$$

откуда видно, что P_m и Q_m суть частныя рѣшенія разностнаго уравненія

(5) $$u_{x+2} - u_{x+1} - u_x = 0,$$

и потому могутъ быть получены изъ общаго его рѣшенія, опредѣляя произвольныя постоянныя такъ, чтобы эти рѣшенія при $m = 1$, и $m = 2$ принимали значенія (2). Итакъ намъ нужно найти прежде всего общій

интегралъ уравненія (5). Такъ какъ оно безъ послѣдняго члена и съ постоянными коэффиціентами, то полагаемъ въ (5):

$$u_x = a^x, \tag{6}$$

и получаемъ для опредѣленія a такое уравненіе:

$$a^2 - a - 1 = 0, \tag{7}$$

откуда находимъ два значенія для a:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \tag{8}$$

а потому общій интегралъ уравненія (5) будетъ:

$$u_x = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x. \tag{9}$$

Чтобы эта формула представляла знаменателей подходящихъ дробей Q_m нашей дроби (1), мы должны опредѣлить C_1 и C_2 такъ, чтобы при $x=1$, и $x=2$ это выраженіе обращалось въ единицу, какъ то видно изъ (2); это дастъ намъ такія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \\ 1 &= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Такъ какъ

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1\pm 2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \tag{11}$$

то послѣднее изъ этихъ двухъ уравненій такъ можетъ быть написано:

$$1 = C_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right); \tag{12}$$

вычитая отсюда первое изъ (10), будемъ имѣть:

$$0 = C_1 + C_2, \tag{13}$$

откуда

$$C_2 = -C_1; \tag{14}$$

внося это въ первое изъ (10), получимъ:

$$1 = C_1\sqrt{5}, \tag{15}$$

откуда и изъ (13) найдемъ:

$$(16)\qquad C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Внося это въ (9), получимъ общее выраженіе для Q_m (перемѣняя x на m) такое именно:

$$(17)\qquad Q_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right\}.$$

Для того, чтобы формула (9) представляла P_m, надобно, чтобы при $x=1$ и $x=2$ вторая часть ея обращалась бы въ 1, соотвѣтственно въ 2, какъ то видно изъ (2); а потому C_1 и C_2 надобно опредѣлить изъ такихъ уравненій:

$$(18)\qquad \begin{cases} 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \\ 2 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2; \end{cases}$$

здѣсь второе уравненіе на основаніи (11) можетъ быть такъ представлено:

$$(19)\qquad 2 = C_1\frac{3+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

вычитая отсюда первое изъ (18), получимъ

$$(20)\qquad 1 = C_1 + C_2,$$

которымъ можно замѣнить (19). Помножая это равенство на $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и вычитая изъ (18) (перваго), получимъ:

$$C_1\sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$(21)\qquad C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

и тогда изъ (20):

$$(22)\qquad C_2 = 1 - C_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}};$$

внося эти значенія въ (9), будемъ имѣть (мѣняя x на m) такое выраженіе для числителей подходящихъ дробей къ дроби (1):

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right\}. \tag{23}$$

Эта формула тождественна съ знаменателемъ слѣдующей подходящей дроби, какъ то видно по сличеніи ея съ (17); слѣдовательно

$$P_m = Q_{m+1}. \tag{24}$$

170. Ак. П. Л. Чебышевъ, изъ лекцій котораго мы заимствовали этотъ примѣръ, формулу (17) для знаменателей подходящихъ дробей дроби (1) предыдущаго § примѣняетъ къ рѣшенію такого вопроса: не болѣе какого числа придется сдѣлать дѣленій для отысканія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ A и B?

Пусть дробь $\frac{A}{B}$ разлагается въ такую непрерывную:

$$\left.\frac{A}{B} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_m}}}},\right\} \tag{1}$$

и пусть подходящія дроби будутъ:

$$\frac{S_1}{T_1};\quad \frac{S_2}{T_2};\quad \frac{S_3}{T_3};\ldots \frac{S_m}{T_m}; \tag{2}$$

очевидно послѣдняя

$$\frac{S_m}{T_m} = \frac{A:D}{B:D}, \tag{3}$$

гдѣ D общій наибольшій дѣлитель чиселъ A и B. Если мы сравнимъ нашу дробь съ дробью предыдущаго §:

$$S = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \text{ до } \infty, \tag{4}$$

то легко замѣтимъ, что

(5) $$T_m \geqq Q_m;$$

такъ какъ

(6) $$B \geqq T_m,$$

то подавно будетъ

(7) $$B \geqq Q_m,$$

или подставляя вмѣсто Q_m его выраженіе изъ (17) предыдущаго §:

(8) $$B \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right\}.$$

Отсюда будемъ имѣть:

(9) $$B\sqrt{5} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \geqq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

Но

(10) $$\sqrt{5} = 2{,}235\ldots;$$

слѣдовательно

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1{,}235\ldots}{2} = 0{,}617\ldots,$$

и

(11) $$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m = \left(-0{,}617\ldots\right)^m;$$

всѣ степени числа $-0{,}617\ldots$ меньше чѣмъ

(12) $$(-0{,}62)^2 = 0{,}3744 < 0{,}375;$$

ибо нечетныя суть отрицательныя, а четныя суть степени числа меньшаго чѣмъ число $0{,}375$, которое есть правильная дробь; а потому мы имѣемъ такое неравенство:

(13) $$0{,}375 > \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m;$$

придавая это неравенство къ (9), получимъ по сокращеніи:

(14) $$B\sqrt{5} + 0{,}375 \geqq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

Взявъ логариѳмъ по основанію 10, получимъ:

$$m \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq \log(B\sqrt{5}+0{,}375),$$

или

$$m \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq \log B + \log\sqrt{5} + \log\left(1+\frac{0{,}375}{B\sqrt{5}}\right); \qquad (15)$$

но

$$\log\left(1+\frac{0{,}375}{B\cdot\sqrt{5}}\right) < \log\left(1+\frac{0{,}38}{\sqrt{5}}\right) < \log\left(1+\frac{0{,}38}{2}\right) = \log(1{,}19); \qquad (16)$$

слѣдовательно, если въ (15) замѣнимъ лѣвую часть (16) правою, то мы неравенство (15) только усилимъ, и будемъ имѣть тогда такое:

$$m < \frac{\log B}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{\log(\sqrt{5}\cdot 1{,}19)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}; \qquad (17)$$

но

$$\left.\begin{aligned} \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} &= 0{,}2089879 > 0{,}2\,; \\ \log(\sqrt{5}\cdot 1{,}19) &= 0{,}4250320\,; \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

потому послѣдній членъ въ (17) будетъ $< 2{,}125016 < 3$; въ первомъ же можно замѣнить знаменатель дробью $0{,}2 = \frac{1}{5}$, чрезъ что неравенство только усилится; слѣдовательно получимъ:

$$m < 5 \log B + 3. \qquad (19)$$

Такъ какъ $\log B$ не можетъ быть болѣе числа цыфръ въ B, то отсюда слѣдуетъ, что m не болѣе увеличеннаго на три единицы упятереннаго числа цыфръ въ B. Такимъ образомъ, если B имѣетъ три цыфры, то при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя придется сдѣлать не болѣе 18-ти дѣленій.

171. Предыдущій примѣръ показываетъ, что числители и знаменатели подходящихъ дробей суть интегралы линейныхъ разностныхъ уравненій второго порядка безъ послѣдняго члена; легко показать, что наоборотъ интегралъ всякаго разностнаго уравненія второго порядка безъ послѣдняго члена можетъ быть разложенъ въ непрерывную дробь. Дѣйствительно, пусть дано уравненіе

$$L_0 u_{x+2h} + L_1 u_{x+h} + L_2 u_x = 0\,; \qquad (1)$$

отсюда находимъ:

(2) $$u_x = -\frac{L_0}{L_2} u_{x+h} - \frac{L_1}{L_2} u_{x+2h},$$

или, положивъ для краткости:

(3) $$-\frac{L_0}{L_2} = M_x; \quad -\frac{L_1}{L_2} = N_x,$$

(4) $$u_x = M_x u_{x+h} + N_x u_{x+2h}.$$

Отсюда дѣля на u_{x+h}, находимъ:

(5) $$\frac{u_x}{u_{x+h}} = M_x + N_x \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}},$$

и взявъ обратную:

(6) $$\frac{u_{x+h}}{u_x} = \frac{1}{M_x + N_x \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}}}.$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+h$, получимъ:

(7) $$\frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} = \frac{1}{M_{x+h} + N_{x+h} \frac{u_{x+3h}}{u_{x+2h}}};$$

перемѣняя здѣсь x на $x+h$, получимъ:

(8) $$\frac{u_{x+3h}}{u_{x+2h}} = \frac{1}{M_{x+2h} + N_{x+2h} \frac{u_{x+4h}}{u_{x+3h}}}.$$

и т. д. Подставляя затѣмъ каждый результатъ въ предыдущій, будемъ имѣть такую непрерывную дробь:

(9) $$\left\{ u_{x+h} = \cfrac{u_x}{M_x + \cfrac{N_x}{M_{x+h} + \cfrac{N_{x+h}}{M_{x+2h} + \cfrac{N_{x+2h}}{M_{x+3h} + \cdots}}}} \right.$$

Пусть напр. дано уравненіе (Lacroix. Traité in 4⁰, III, p. 222. Paris 1819):

$$u_x = u_{x+1} + a(x+1)u_{x+2}; \tag{10}$$

отсюда по (9), полагая тамъ $M_x = 1$, и $N_x = a(x+1)$, найдемъ:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{a(x+1)}{1+\cfrac{a(x+2)}{1+\cfrac{a(x+3)}{1+\cdots}}}}; \tag{11}$$

полагая $x = 0$, получимъ отсюда:

$$\frac{u_1}{u_0} = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{2a}{1+\cfrac{3a}{1+\cdots}}}}. \tag{12}$$

Пусть еще дано такое уравненіе (Laplace, Traité de Mecanique celeste, v. IV p. 287, Paris 1880):

$$qxu_{x+1} - (2qx+1)u_x + qxu_{x-1} = 0; \tag{13}$$

перемѣнивъ въ немъ x на $x+1$, будемъ имѣть:

$$q(x+1)u_{x+2} - (2q(x+1)+1)u_{x+1} + q(x+1)u_x = 0; \tag{14}$$

отсюда найдемъ:

$$u_x = \frac{[2q(x+1)+1]}{q(x+1)} u_{x+1} - u_{x+2}; \tag{15}$$

слѣдовательно

$$M_x = \frac{2q(x+1)+1}{q(x+1)}; \qquad N_x = -1; \tag{16}$$

а потому будетъ:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \cfrac{q(x+1)}{2q(x+1)+1-\cfrac{q^2(x+1)(x+2)}{2q(x+2)+1-\cfrac{q^2(x+2)(x+3)}{2q(x+3)+1-\cdots}}} \tag{17}$$

Лапласъ находитъ другое разложеніе, вводя вмѣсто u_x новую функцію v_x, полагая

$$(18)\qquad \frac{u_{x+1}}{u_x}=\frac{q(x+1)}{1+qx+v_{x+1}};$$

раздѣливъ (15) на u_{x+1}, и внося въ него вмѣсто $\frac{u_{x+1}}{u_x}$ и $\frac{u_{x+2}}{u_{x+1}}$ ихъ выраженія изъ (18), мы будемъ имѣть:

$$\frac{1+qx+v_{x+1}}{q(x+1)}=\frac{2q(x+1)+1}{q(x+1)}-\frac{q(x+2)}{1+q(x+1)+v_{x+2}}$$

или, отнимая отъ обѣихъ частей по $\frac{1+qx}{q(x+1)}$:

$$\frac{v_{x+1}}{q(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}-\frac{q(x+2)}{1+qx(+1)+v_{x+2}},$$

или

$$\frac{v_{x+1}}{q(x+1)}=\frac{(x+2)(1+v_{x+2})}{[1+v_{x+2}+q(x+1)](x+1)};$$

откуда

$$(19)\qquad v_{x+1}=\cfrac{q(x+2)}{1+\cfrac{q(x+1)}{1+v_{x+2}}}.$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+1$, x на $x+2$ и т. д. и подставляя каждый полученный результатъ въ предшествующій, будемъ имѣть такую непрерывную дробь для v_{x+1}:

$$(20)\qquad v_{x+1}=\cfrac{q(x+2)}{1+\cfrac{q(x+1)}{1+\cfrac{q(x+3)}{1+\cfrac{q(x+2)}{1+\cfrac{q(x+4)}{1+\cfrac{q(x+3)}{1+\cdots}}}}}};$$

внося это въ (18), получимъ:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x}=\cfrac{q(x+1)}{1+qx+\cfrac{q(x+2)}{1+\cfrac{q(x+1)}{1+\cfrac{q(x+3)}{1+\cfrac{q(x+2)}{1+\cfrac{q(x+4)}{1+\cfrac{q(x+3)}{1+\cdot}}}}}}} \qquad (21)$$

172. Послѣднія два уравненія были 2-го порядка линейныя съ перемѣнными коэффиціентами. Относительно такихъ уравненій общаго извѣстно только то, что ихъ полный интегралъ можетъ быть найденъ, коль скоро извѣстенъ частный интегралъ соотвѣтственнаго уравненія безъ послѣдняго члена. Пусть дано уравненіе 2-го порядка;

$$u_{x+2h}+P_x u_{x+h}+Q_x u_x=R_x, \qquad (1)$$

гдѣ P_x, Q_x и R_x данныя функціи x; пусть v_x есть интегралъ уравненія:

$$v_{x+2h}+P_x v_{x+h}+Q_x v_x=0, \qquad (2)$$

получаемаго изъ (1) отбрасывая послѣдній членъ; положимъ

$$u_x=t_x v_x \qquad (3)$$

и внесемъ это въ (1). Имѣя въ виду, что

$$t_{x+h}=t_x+\Delta t_x$$
$$t_{x+2h}=t_x+2\Delta t_x+\Delta^2 t_x,$$

мы получимъ, располагая по разностямъ t_x:

$$v_{x+2h}\Delta^2 t_x+(P_x v_{x+h}+2v_{x+2h})\Delta t_x+(v_{x+2h}+P_x v_{x+h}+Q_x v_x)t_x=R_x, \qquad (4)$$

а это по (2) приводится къ такому:

$$v_{x+2h}\Delta^2 t_x+(2v_{x+2h}+P_x v_{x+h})\Delta t_x=R_x \qquad (5)$$

или, имѣя въ виду, что

$$\Delta^2 t_x+\Delta t_x=\Delta t_{x+h},$$

къ такому:

(6) $$v_{x+2h}\Delta t_{x+h}+(v_{x+2h}+P_x v_{x+h})\Delta t_x=R_x\,,$$

или, дѣля на v_{x+2h}:

(7) $$\Delta t_{x+h}+\left(1+\frac{P_x v_{x+h}}{v_{x+2h}}\right)\Delta t_x=\frac{R_x}{v_{x+2h}}\,;$$

Но изъ (2) имѣемъ:

$$1+\frac{P_x v_{x+h}}{v_{x+2h}}=-Q_x\frac{v_x}{v_{x+2h}}\,;$$

внося это въ послѣднее будемъ имѣть:

(8) $$\Delta t_{x+h}-Q_x\frac{v_x}{v_{x+2h}}\Delta t_x=\frac{R_x}{v_{x+2h}}\,;$$

это же есть линейное уравненіе перваго порядка относительно Δt_x, интегралъ котораго найдется по (12) § 149, перемѣняя тамъ R_x на $-Q_x\dfrac{v_x}{v_{x+2h}}$ и Q_x на $\dfrac{R_x}{v_{x+2h}}$, и будетъ:

(9) $$\Delta t_x=\prod_\alpha^x\left(Q_x\frac{v_x}{v_{x+2h}}\right)\left\{\sum_\alpha^x\frac{R_x}{v_{x+2h}\prod\limits_\alpha^{x+h}\left(Q_x\dfrac{v_x}{v_{x+2h}}\right)}+C\right\};$$

суммируя, найдемъ:

(10) $$t_x=\sum_\alpha^x\left[\prod_\alpha^x\left(Q_x\frac{v_x}{v_{x+2h}}\right)\left\{\sum_\alpha^x\frac{R_x}{v_{x+2h}\prod\limits_\alpha^{x+h}\left(Q_x\dfrac{v_x}{v_{x+2h}}\right)}+C\right\}\right]+C_1;$$

внося это въ (3), будемъ имѣть:

(11) $$u_x=v_x\left\{\sum_\alpha^x\left[\prod_\alpha^x\left(Q_x\frac{v_x}{v_{x+2h}}\right)\left\{\sum_\alpha^x\frac{R_x}{v_{x+2h}\prod\limits_\alpha^{x+h}\left(Q_x\dfrac{v_x}{v_{x+2h}}\right)}+C\right\}\right]+C_1\right\}$$

—общій интегралъ уравненія (1), ибо это выраженіе заключаетъ двѣ произвольныя постоянныя.

173. 173. Для примѣра возьмемъ уравненіе:

(1) $$u_{x+2}-xu_{x+1}+(x-1)u_x=\sin x\,;$$

уравненію безъ послѣдняго члена:

$$v_{x+2} - xv_{x+1} + (x-1)v_x = 0\,, \tag{2}$$

очевидно удовлетворяетъ

$$v_x = 1\,, \tag{3}$$

или вообще какой либо постоянной; предположеніе $v_x = 1$ общности не уменьшаетъ, ибо если $v_x = K$, то это K въ одномъ членѣ формулы (11) предыдущаго § сократится, въ другихъ сольется съ C. Въ такомъ случаѣ эта формула для нашего уравненія дастъ такой интегралъ:

$$u_x = \sum_\alpha^x \prod_\alpha^x (x-1)\left\{\sum_\alpha^x \frac{\sin x}{\prod\limits_\alpha^{x+1}(x-1)} + C\right\} + C'. \tag{4}$$

Полагая $\alpha = 2$, будемъ имѣть:

$$u_x = \sum_2^x \Gamma(x-1)\left\{\sum_2^x \frac{\sin x}{\Gamma(x)} + C\right\} + C', \tag{5}$$

(ибо

$$\Gamma(x-1) = 1.2.3\ldots(x-2) = \prod_2^x (x-1),$$

$$\Gamma(x) = 1.2.3\ldots(x-1) = \prod_2^{x+1}(x-1).)$$

174\. Вообще, если извѣстно m частныхъ рѣшеній линейнаго уравненія n-го порядка:

$$L_0 u_{x+nh} + L_1 v_{x+\overline{n-1}h} + L_2 v_{x+\overline{n-2}h} + \ldots + L_{n-1} v_{x+h} + L_n v_x = 0\,, \tag{1}$$

то можно понизить на m единицъ порядокъ полнаго уравненія

$$L_0 u_{x+nh} + L_1 u_{x+\overline{n-1}h} + L_2 u_{x+\overline{n-2}h} + \ldots + L_{n-1} u_{x+h} + L_n u_x = Q_x\,. \tag{2}$$

Пусть

$$v_x^{(1)},\quad v_x^{(2)},\quad v_x^{(3)},\ldots v_x^{(m)} \tag{3}$$

суть частныя рѣшенія уравненія (1); возьмемъ сперва одно изъ нихъ, напр. $v_x^{(1)}$; тогда и $C^{(1)}v_x^{(1)}$ будетъ ему удовлетворять; попробуемъ удовлетворить уравненію (2), полагая

$$u_x = C_x^{(1)} v_x^{(1)}\,, \tag{4}$$

разсматривая слѣдовательно $C^{(1)}$ уже какъ функцію, и посмотримъ отъ чего зависитъ опредѣленіе этой функціи. Изъ (4), мѣняя x на $x+h$, $x+2h, \ldots x+nh$, получимъ:

$$(5)\begin{cases} u_{x+h}=C_x^{(1)}v_{x+h}^{(1)}+\Delta C_x^{(1)}\cdot v_{x+h}^{(1)}; \\ u_{x+2h}=C_x^{(1)}v_{x+2h}^{(1)}+2\Delta C_x^{(1)}\cdot v_{x+2h}^{(1)}+\Delta^2 C_x^{(1)}\cdot v_{x+2h}^{(1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{x+nh}=C_x^{(1)}v_{x+nh}^{(1)}+n\Delta C_x^{(1)}\cdot v_{x+nh}^{(1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 C_x^{(1)}\cdot v_{x+nh}^{(1)}+\ldots+\Delta^n C_x^{(1)}v_{x+nh}^{(1)}; \end{cases}$$

внося въ уравненіе (2), получимъ:

$$(6)\begin{cases} L_0 v_{x+nh}^{(1)}\Delta^n C_x^{(1)}+ \\ +\left(nL_0 v_{x+nh}^{(1)}+L_1 v_{x+\overline{n-1}h}^{(1)}\right)\Delta^{n-1}C_x^{(1)}+ \\ +\left(\frac{n(n-1)}{1.2}L_0 v_{x+nh}^{(1)}+nL_1 v_{x+\overline{n-1}h}^{(1)}+L_2 v_{x+\overline{n-2}h}^{(1)}\right)\Delta^{n-2}C_x^{(1)}+ \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ \\ +\left(nL_0 v_{x+nh}^{(1)}+(n-1)L_1 v_{x+\overline{n-1}h}^{(1)}+\ldots+2L_{n-2}v_{x+2h}^{(1)}+L_{n-1}v_{x+h}^{(1)}\right)\Delta C_x^{(1)}+ \\ +\left(L_0 v_{x+nh}^{(1)}+L_1 v_{x+\overline{n-1}h}^{(1)}+L_2 v_{x+\overline{n-2}h}^{(1)}+\ldots+L_{n-1}v_{x+h}^{(1)}+L_n v_x^{(1)}\right)C_x^{(1)}=Q_x. \end{cases}$$

Но коэффиціентъ при $C_x^{(1)}$ есть не что иное, какъ первая часть уравненія (1), въ которое вмѣсто v_x внесена удовлетворяющая этому уравненію функція $v_x^{(1)}$, слѣдовательно тождественно равенъ нулю. Потому полагая

$$(7)\qquad \Delta C_x^{(1)}=w_x,$$

и обозначая для краткости остальные коэффиціенты уравненія (6), которые суть все извѣстныя функціи x, по порядку чрезъ:

$$(8)\qquad M_0,\ M_1,\ M_2\ldots M_{n-1},$$

мы будемъ имѣть для опредѣленія этой величины такое уравненіе:

$$(9)\qquad M_0\Delta^{n-1}w_x+M_1\Delta^{n-2}w_x+M_2\Delta^{n-2}w_x+\ldots+M_{n-1}w_x=Q_x,$$

которое при помощи формулы (4) § 29 можетъ быть приведено къ такому виду:

$$(10)\qquad N_0 w_{x+\overline{n-1}h}+N_1 w_{x+\overline{n-2}h}+N_2 w_{x+\overline{n-3}h}+\ldots+N_{n-1}w_x=Q_x;$$

это же уравненіе того же вида какъ данное, только порядка уже на единицу нисшаго; найдя отсюда w_x, потомъ при помощи простаго суммированія найдемъ изъ (7) и $C_x^{(1)}$. Если теперь мы будемъ знать одинъ интегралъ слѣдующаго уравненія безъ послѣдняго члена:

$$N_0 t_{x+\overline{n-1}h} + N_1 t_{x+\overline{n-2}h} + N_2 t_{x+\overline{n-3}h} + \dots + N_{n-1} t_x = 0\,, \qquad (11)$$

то мы точно также будемъ имѣть возможность понизить на единицу и порядокъ уравненія (10). Но уравненіе (11) получится изъ (1) съ помощію подстановки:

$$t_x = \triangle C_x^{(1)} = \triangle\left(\frac{v_x}{v_x^{(1)}}\right), \qquad (12)$$

какъ (10) изъ (2) съ помощію подстановки (7):

$$w_x = \triangle C_x^{(1)} = \triangle\left(\frac{u_x}{v_x^{(1)}}\right), \qquad (13)$$

(какъ то слѣдуетъ изъ (4)); а потому, если уравненію (1) удовлетворяютъ значенія (3):

$$v_x^{(2)}\,,\quad v_x^{(3)}\,, \dots v_x^{(m)}\,,$$

то уравненіе (11) удовлетворяется слѣдующими $m-1$ функціями:

$$\triangle\left(\frac{v_x^{(2)}}{v_x^{(1)}}\right); \quad \triangle\left(\frac{v_x^{(3)}}{v_x^{(1)}}\right); \dots \triangle\left(\frac{v_x^{(m)}}{v_x^{(1)}}\right); \qquad (14)$$

мы такимъ образомъ дѣйствительно знаемъ $m-1$ интеграловъ уравненія (11), а слѣдовательно можемъ понизить порядокъ уравненія (10) на единицу, или что тоже понизить порядокъ даннаго уравненія на двѣ единицы. Продолжая это, мы придемъ наконецъ къ уравненію, порядокъ котораго будетъ на m единицъ ниже порядка даннаго уравненія.

175. Если бы мы знали m интеграловъ не уравненія безъ послѣдняго члена (1) предъидущаго §, но полнаго уравненія (2) того же §, то въ такомъ случаѣ порядокъ этого послѣдняго можно было бы понизить только на $m-1$ единицъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы знаемъ m линейно-независимыхъ интеграловъ полнаго уравненія (2),—пусть:

$$u_x^{(1)}\,,\quad u_x^{(2)}\,,\quad u_x^{(3)} \dots u_x^{m}\,, \qquad (1)$$

то мы будемъ знать только $m-1$ линейно независимыхъ интеграловъ неполнаго уравненія (1), именно:

$$u_x^{(2)} - u_x^{(1)}\,; \quad u_x^{(3)} - u_x^{(1)}\,; \dots u_x^{(m)} - u_x^{(1)}\,; \qquad (2)$$

дѣйствительно, подставляя во (2) сперва $u_x^{(i)}$, потомъ $u_x^{(1)}$ и вычитая послѣднее тождество изъ перваго, мы получимъ новое тождество, лѣвая часть котораго будетъ не что иное какъ результатъ вставки

$$(3) \qquad u_x^{(i)} - u_x^{(1)}$$

вмѣсто v_x въ первую часть уравненія (1), правая—нуль. Больше же изъ m функцій (1) нельзя составить линейно независимыхъ выраженій этого вида, ибо, напримѣръ,

$$(4) \qquad u_x^{(i)} - u_x^{(j)} = u_x^{(i)} - u_x^{(1)} - (u_x^{(j)} - u_x^{(1)}).$$

Если число извѣстныхъ намъ интеграловъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$m = n - 1\,,$$

то тогда отысканіе полнаго интеграла даннаго уравненія сведется на интегрированіе уравненіе перваго порядка и рядъ суммированій, и потому можетъ быть доведено до конца; если же $m < n - 1$, то тогда только въ очень немногихъ случаяхъ можно будетъ отыскать полный интегралъ, ибо линейныя уравненія порядка выше перваго съ перемѣнными коэффиціентами интегрируются очень рѣдко.

176. 176. Можно свести на уравненіе съ постоянными коэффиціентами уравненіе такого вида:

$$(1) \quad \begin{cases} A_0 u_{x+nh} + A_1\varphi(x) u_{x+\overline{n-1}h} + A_2\varphi(x)\varphi(x-h) u_{x+\overline{n-2}h} + \\ \quad + A_3\varphi(x)\varphi(x-h)\varphi(x-2h) u_{x+\overline{n-3}h} + \ldots + \\ \quad + A_n\varphi(x)\varphi(x-h)\varphi(x-2h)\ldots\varphi(x-\overline{n-1}h) u_x = Q_x\,, \end{cases}$$

гдѣ $A_1, A_0 \ldots A_n$ суть постоянныя величины, а $\varphi(x)$ данная функція x, тоже и Q_x; для этого стоитъ только положить u_x равнымъ произведенію такой факторіэльной функціи на новую функцію v_x:

$$(2) \qquad u_x = \varphi(x-nh)\varphi(x-\overline{n+1}h)\ldots\varphi(\alpha+h)\varphi(\alpha) v_x\,;$$

тогда будетъ:

$$(3) \quad \begin{cases} u_{x+h} = \varphi(x-\overline{n-1}h)\varphi(x-nh)\ldots\varphi(\alpha) v_{x+h}\,; \\ u_{x+2h} = \varphi(x-\overline{n-2}h)\varphi(x-\overline{n-1}h)\ldots\varphi(\alpha) v_{x+2h}\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{x+nh} = \varphi(x)\varphi(x-h)\varphi(x-2h)\ldots\varphi(\alpha) v_{x+nh}\,; \end{cases}$$

внося это въ данное уравненіе и дѣля обѣ части на произведеніе:

$$\Phi(x)=\varphi(x)\varphi(x-h)\ldots\varphi(\alpha)\,, \tag{4}$$

которое войдетъ тогда во всѣ члены лѣвой части, мы будемъ имѣть для опредѣленія v_x уравненіе съ постоянными коэффиціентами:

$$A_0v_{x+nh}+A_1v_{x+\overline{n-1}h}+A_2v_{x+\overline{n-2}h}+\ldots+A_nv_x=\frac{Q_x}{\Phi(x)}. \tag{5}$$

177. Пусть напримѣръ дано уравненіе:

$$x(x+1)u_{x+2}-3xu_{x+1}+2u_x=x(x+1)(x+2)\,; \tag{1}$$

дѣля на $x(x+1)$, мы приведемъ его къ виду:

$$u_{x+2}-3\frac{1}{x+1}u_{x+1}+2\frac{1}{x(x+1)}u_x=x+2\,; \tag{2}$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x)=\frac{1}{x+1}\,;\\ &\varphi(x)\varphi(x-1)=\frac{1}{(x+1)x}\,;\\ &Q_x=x+2\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Полагая

$$u_x=\frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(\alpha+1)\alpha}\,v_x\,, \tag{4}$$

мы будемъ имѣть:

$$u_{x+1}=\frac{1}{x(x-1)(x-2)\ldots(\alpha+1)\alpha}\,v_{x+1}\,; \tag{5}$$

$$u_{x+2}=\frac{1}{(x+1)x(x-1)\ldots(\alpha+1)\alpha}\,v_{x+2}\,; \tag{6}$$

внося это въ (2) и помножая все на

$$(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(\alpha+1)\alpha\,, \tag{7}$$

мы получимъ:

$$v_{x+2}-3v_{x+1}+2v_x=(x+2)(x+1)x(x-1)\ldots(\alpha+1)\alpha\,. \tag{8}$$

Соотвѣтственное уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

$$w_{x+2}-3w_{x+1}+2w_x=0\,, \tag{9}$$

и его общій интегралъ будетъ:

(10) $$w_x = C^{(1)} + C^{(2)} 2^x;\ ^{*)}$$

потому можемъ положить:

(11) $$v_x = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} 2^x.$$

Перемѣняя здѣсь x на $x+1$ будемъ имѣть

(12) $$v_{x+1} = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} 2^{x+1},$$

если положимъ

(13) $$\triangle C_x^{(1)} + \triangle C_x^{(2)} 2^{x+1} = 0;$$

перемѣняя въ (12) x на $x+1$, будемъ имѣть:

(14) $$\begin{cases} v_{x+2} = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} 2^{x+2} + \\ \quad + \triangle C_x^{(1)} + \triangle C_x^{(2)} 2^{x+2}; \end{cases}$$

внося изъ (11), (12) и (14) въ (8), будемъ имѣть:

(15) $$\triangle C_x^{(1)} + \triangle C_x^{(2)} 2^{x+2} = (x+2)(x+1)x \ldots (\alpha+1)\alpha.$$

Вычитая отсюда (13), будемъ имѣть:

$$2^{x+1} \triangle C_x^{(2)} = (x+2)(x+1)x \ldots (\alpha+1)\alpha;$$

откуда

(16) $$\triangle C_x^{(2)} = (x+2)(x+1)x \ldots (\alpha+1)\alpha . 2^{-x-1};$$

помножая (13) на 2 и вычитая изъ него (15) получимъ

$$\triangle C_x^{(1)} = -(x+2)(x+1)x \ldots (\alpha+1)\alpha;$$

откуда

(17) $$\triangle C_x^{(1)} = -(x+2)(x+1)x \ldots (\alpha+1)\alpha.$$

Отсюда суммируя, находимъ:

---

*) ибо корни уравненія $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ суть

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}\right\}$$

а x мы будемъ принимать вещественнымъ.

$$\left.\begin{aligned} C_x^{(1)} &= -\sum_\alpha^x (x+2)(x+1)x\ldots(\alpha+1)\alpha + C_1 \\ C_x^{(2)} &= \sum_\alpha^x (x+2)(x+1)x\ldots(\alpha+1)\alpha\,.\,2^{-x-1} + C_2; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

вносяя это въ (11), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} v_x = &-\sum_\alpha^x (x+2)(x+1)x\ldots(\alpha+1)\alpha + C_1 + \\ &+ 2^x\sum_\alpha^x (x+2)(x+1)x\ldots(\alpha+1)\alpha\,.\,2^{-x-1} + C_2\,.\,2^x; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

вносяя это въ (4) будемъ имѣть и u_x.

Входящія сюда суммированія не могутъ быть выполнены въ конечномъ видѣ, ибо число множителей въ факторіэляхъ, подлежащихъ суммированію, зависитъ отъ x.

178. Вотъ другой примѣръ (изъ книги Буля стр. 233), въ которомъ вычисленіе удается довести до конца:

$$u_{x+2} - 2(x-1)u_{x+1} + (x-1)(x-2)u_x = \Gamma(x+1)\,, \quad (1)$$

гдѣ

$$\Gamma(x+1) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots x; \quad (2)$$

полагая

$$u_x = \Gamma(x-2)\,.\,v_x\,, \quad (3)$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} u_{x+1} &= \Gamma(x-1)v_{x+1}\,; \\ u_{x+2} &= \Gamma(x)v_{x+2}\,; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

вносяя это въ (1) и замѣчая, что вообще

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)\,, \quad (5)$$

мы получимъ послѣ сокращенія на $\Gamma(x)$ такое уравненіе:

$$v_{x+2} - 2v_{x+1} + v_x = x\,, \quad (6)$$

что можно и такъ представить:

$$\Delta^2 v_x = x\,, \quad (7)$$

откуда послѣ двукратнаго суммированія находимъ:

$$(8) \qquad v_x = \frac{x^{(3)}}{1.2.3} + C_1 \frac{x^{(1)}}{1} + C_2;$$

внося это въ (3), будемъ имѣть:

$$(9) \qquad u_x = \Gamma(x-2)\left\{\frac{x^{(3)}}{1.2.3} + C_1 x + C_2\right\}.$$

179. Если дана система m уравненій, содержащихъ m функцій и ихъ разности различныхъ порядковъ, то всегда можно, вводя новыя функціи, преобразовать ее въ другую которая, будетъ содержать разности этихъ функцій только перваго порядка: для этого стоитъ только всѣ разности за исключеніемъ послѣдней, т. е. наивысшаго порядка, каждой изъ функцій означить особою буквою. Такъ если имѣемъ одно уравненіе, содержащее функцію u_x и ея разности до порядка k включительно, то полагаемъ:

$$(1) \qquad \Delta u_x = v_x; \quad \Delta^2 u_x = v_x^{(1)}; \quad \Delta^3 u_x = v_x^{(2)}; \dots \Delta^{k-1} u_x = v_x^{(k-2)};$$

тогда будетъ:

$$(2) \qquad \Delta u_x = v_x; \quad \Delta v_x = v_x^{(1)}; \quad \Delta v_x^{(1)} = v_x^{(2)}; \dots \Delta v_x^{(k-3)} = v_x^{(k-2)};$$

и уравненіе:

$$(3) \qquad \varphi(x, u_x, \Delta u_x, \Delta^2 u_x, \dots \Delta^{k-1} u_x, \Delta^k u_x) = 0$$

преобразуется въ такое:

$$(4) \qquad \varphi(x, u_x, v_x, v_x^{(1)}, \dots v_x^{k-2}, \Delta v_x^{k-2}) = 0,$$

которое будетъ содержать $k-1$ новыхъ функцій, опредѣляемыхъ уравненіями (2) и разность перваго порядка одной послѣдней функціи $v_x^{(k-2)}$. Слѣдовательно, вводя новыя функціи при помощи уравнененій (2), мы привели уравненіе (3) порядка k къ системѣ k уравненій перваго порядка (2) и (4). Также поступаютъ и въ случаѣ большаго числа уравненій съ большимъ числомъ функцій. На основаніи этого замѣчанія мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ лишь такихъ системъ совокупныхъ разностныхъ уравненій, которыя содержатъ лишь разности перваго порядка искомыхъ функцій. Данная система уравненій будетъ *линейною*, когда какъ функціи, такъ и ихъ разности будутъ входить въ уравненія въ первой степени. Рѣшая такую систему по разностямъ, можно всегда дать ей такой видъ:

$$\left.\begin{array}{c}\Delta u_x^{(l)}=A_x^{(l)}+A_x^{(l,1)}u_x^{(1)}+A_x^{(l,2)}u_x^{(2)}+\ldots+A_x^{(l,m)}u_x^{(m)}\\ {[l=1,2,3,\ldots m]}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

или, короче написавъ:

$$\left.\begin{array}{c}\Delta u_x^{(l)}=A_x^{(l)}+\sum_{i=1}^{i=m}A_x^{(l,i)}u_x^{(i)}.\\ {[l=1,2,3,\ldots m]}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Если пожелаемъ вмѣсто разностей ввести значенія функцій для слѣдующаго значенія x (т. е. для $x+h$), то стоитъ только къ уравненію (1) придать къ обѣимъ частямъ по $u_x^{(l)}$; тогда получимъ уравненіе такого вида:

$$u_{x+h}^{(l)}=A_x^{(l)}+A_x^{(l,1)}u_x^{(1)}+\ldots+(A_x^{(l,l)}+1)u_x^{(l)}+\ldots+A_x^{(l,m)}u_x^{(m)}, \qquad (3)$$

или, короче:

$$\left.\begin{array}{c}u_{x+h}^{(l)}=A_x^{(l)}+\sum_{i=1}^{i=m}A_x^{(l,i)}u_x^{(i)},\\ {[l=1,2,3,\ldots m]}\end{array}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ всѣ коэффиціенты будутъ тѣже, какъ и во (2), за исключеніемъ коэффиціента при $u_x^{(l)}$, который увеличится на единицу.

180. 180. Можно, наоборотъ, систему уравненій съ m неизвѣстными функціями привести къ одному уравненію съ одною неизвѣстною функціей и ея разностями до порядка m; мы покажемъ, какъ это дѣлается на линейныхъ уравненіяхъ предыдущаго §, причемъ увидимъ, что полученное въ такомъ случаѣ уравненіе съ одной неизвѣстною функціей будетъ тоже линейное. Беря разность отъ (2) предыдущаго §, мы получимъ такой результатъ:

$$\Delta^2 u_x^{(l)}=\Delta A_x^{(l)}+\sum_{i=1}^{i=m}\left\{\Delta A_x^{(l,i)}u_x^{(i)}+A_{x+h}^{(l,i)}\Delta u_x^{(i)}\right\}; \qquad (1)$$

подставляя сюда вмѣсто разностей функцій $\Delta u_x^{(i)}$ ихъ выраженія чрезъ функціи изъ уравненій (2) пред. §, будемъ имѣть уравненіе такого вида:

$$\Delta^2 u_x^{(l)}=B_x^{(l)}+\sum_{i=1}^{i=m}B_x^{(l,i)}u_x^{(i)}; \qquad (2)$$

беря разность отъ этого уравненія и исключая разности $\Delta u_x^{(i)}$ при помощи уравненій (2) пред. §, получимъ уравненіе такого вида:

(3) $$\triangle^3 u_x^{(l)} = C_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} C_x^{(l,i)} u_x^{(i)};$$

продолжая это, придемъ наконецъ къ уравненію такого вида·

(4) $$\triangle^m u_x^{(l)} = M_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} M_x^{(l,i)} u_x^{(i)};$$

исключая теперь изъ m уравненій, именно (2) предыдущаго §, (1), (2), (3)...(4) настоящаго $m-1$ функцій:

(5) $$u_x^{(1)}, \quad u_x^{(2)}, \ldots u_x^{(l-1)}, \quad u_x^{(l+1)}, \ldots u_x^{(m)},$$

получимъ одно уравненіе съ одной функціей $u_x^{(l)}$ и ея разностями до порядка m, притомъ въ первыхъ степеняхъ, слѣдовательно линейное. Найдя $u_x^{(l)}$, удовлетворяющее этому уравненію, прочія функціи найдемъ алгебраическимъ путемъ, рѣшая по нимъ $m-1$ изъ перечисленныхъ сейчасъ уравненій.

181. 181. Къ тому же результату придемъ еще скорѣе, беря вторую форму системы разностныхъ уравненій, (4) § 179; перемѣняя x на $x+h$ въ этомъ уравненіи:

(1) $$u_{x+h}^{(l)} = A_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} A_x^{(l,i)} u_x^{(i)},$$

мы получимъ по исключеніи $u_{x+h}^{(i)}$ изъ результата при помощи уравненій (4) § 179 уравненіе такого вида:

(2) $$u_{x+2h}^{(l)} = B_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} B_x^{(l,i)} u_x^{(i)};$$

поступая также съ этимъ уравненіемъ, получимъ уравненіе такого вида:

(3) $$u_{x+3h}^{(l)} = C_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} C_x^{(l,i)} u_x^{(i)},$$

и продолжая это, дойдемъ наконецъ до уравненія вида:

(4) $$u_{x+mh}^{(l)} = M_x^{(l)} + \sum_{i=1}^{i=m} M_x^{(l,i)} u_x^{(i)};$$

исключая изъ m уравненій (1)—(4) $m-1$ функцій (5) предыдущаго §, мы придемъ къ уравненію первой степени относительно $u_x^{(l)}$ и ея m

слѣдующихъ значеній до $u^{(l)}_{x+mh}$ включительно, слѣдовательно къ линейному уравненію m-го порядка съ одной функціей $u^{(l)}_x$. Найдя ее изъ этого уравненія, прочія найдемъ алгебраическимъ путемъ, рѣшая $m-1$ изъ уравненій (1) и (4) по этимъ функціямъ.

182. Пусть для перваго примѣра дана система уравненій:

$$\left.\begin{aligned} u_{x+1} - a^2 x v_x &= 0, \\ v_{x+1} - x u_x &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

перемѣняя въ первомъ x на $x+1$ и исключая v_{x+1} при помощи второго, будемъ имѣть уравненіе 2-го порядка:

$$u_{x+2} - a^2 x(x+1) u_x = 0; \qquad (2)$$

отсюда по § 176 дѣля на $1.2.3\ldots(x-1)x(x+1)$, получимъ:

$$\frac{u_{x+2}}{1.2.3\ldots x(x+1)} - a^2 \frac{u_x}{1.2.3\ldots(x-1)} = 0; \qquad (3)$$

или, полагая

$$\frac{u_x}{1.2.3\ldots(x-1)} = w_x, \qquad (4)$$

такое:

$$w_{x+2} - a^2 w_x = 0; \qquad (5)$$

интегралъ его по § 161 будетъ:

$$w_x = Ca^x + C_1(-a)^x; \qquad (6)$$

внося въ (4), найдемъ оттуда:

$$u_x = 1.2.3\ldots(x-1)[Ca^x + C_1(-a)^x]. \qquad (7)$$

Изъ перваго изъ уравненій (1) имѣемъ:

$$v_x = \frac{u_{x+1}}{a^2 x},$$

и внося сюда вмѣсто u_{x+1} его значеніе, вычисленное по формулѣ (7), получимъ послѣ легкихъ упрощеній:

$$v_x = \frac{1.2.3\ldots(x-1)}{a}[Ca^x - C_1(-a)^x]. \qquad (9)$$

183. Пусть еще дана система уравненій:

$$(1)\quad \begin{cases} u_{x+2} + 2v_{x+1} - 8u_x = a^x, \\ v_{x+2} - u_{x+1} - 2v_x = a^{-x}; \end{cases}$$

оба уравненія 2-го порядка; полагая

$$(2)\quad u_{x+1} = w_x; \quad v_{x+1} = t_x,$$

мы легко дадимъ имъ такой видъ:

$$(3)\quad \begin{cases} w_{x+1} = a^x - 2t_x + 8u_x, \\ t_{x+1} = a^{-x} + w_x + 2v_x, \end{cases}$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть систему четырехъ уравненій (2) и (3) съ четырьмя неизвѣстными функціями:

$$(4)\quad u_x; \; v_x; \; w_x; \; t_x,$$

такого вида, къ какому по § 179 и слѣдовало привести нашу систему уравненій. Перемѣняя въ первомъ изъ (2) x на $x+1$ и вставляя вмѣсто w_{x+1} его значеніе изъ (3), мы будемъ имѣть такое уравненіе:

$$(5)\quad u_{x+2} = a^x - 2t_x + 8u_x;$$

перемѣняя здѣсь x на $x+1$, получимъ:

$$u_{x+3} = a^{x+1} - 2t_{x+1} + 8u_{x+1};$$

вставляя сюда вмѣсто t_{x+1} его значеніе изъ второго (3), мы будемъ имѣть еще такое уравненіе:

$$(6)\quad u_{x+3} = a^{x+1} - 2a^{-x} - 2w_x - 4v_x + 8u_{x+1};$$

такъ какъ намъ нужно исключить три функціи v_x, w_x, t_x, то трехъ уравненій (2), (5) и (6) еще недостаточно; потому мѣняемъ въ (6) x на $x+1$; получимъ:

$$u_{x+4} = a^{x+2} - 2a^{-x-1} - 2w_{x+1} - 4v_{x+1} + 8u_{x+2};$$

вставляя сюда вмѣсто v_{x+1} и w_{x+1} ихъ значенія изъ уравненій (2) и (3), послѣ приведенія подобныхъ членовъ мы будемъ имѣть такое уравненіе:

$$(7)\quad u_{x+4} = a^{x+2} - 2a^x - 2a^{-x-1} - 16u_x + 8u_{x+2},$$

или

$$(8)\quad u_{x+4} - 8u_{x+2} + 16u_x = a^{x+2} - 2a^x - 2a^{-x-1},$$

линейное 4-го порядка, съ постоянными коэффиціентами и послѣднимъ членомъ. Это уравненіе мы получили по общему методу съ цѣлью его

поясненія; но оно получается частнымъ пріемомъ скорѣе. Перемѣняя въ (1) x на $x+1$, мы получимъ:

$$u_{x+3}+2v_{x+2}-8u_{x+1}=a^{x+1}; \tag{9}$$

вычитая отсюда второе изъ (1), умноженное на 2, получимъ по приведеніи подобныхъ членовъ:

$$u_{x+3}-6u_{x+1}+4v_x=a^{x+1}-2a^{-x}; \tag{10}$$

перемѣняя здѣсь x на $x+1$ и вычитая затѣмъ первое изъ (1), помноженное на 2, получимъ:

$$u_{x+4}-8u_{x+2}+16u_x=a^{x+2}-2a^x-2a^{-x-1},$$

что тождественно съ (8). — Интегралъ этого уравненія найдется по § 162 и будетъ:

$$u_x=\frac{a^2-2}{(a^2-4)^2}a^x-\frac{2}{a}\frac{a^{-x}}{(a^{-2}-4)^2}+(C_0+C_1x)2^x+(C_2+C_3x)(-2)^x. \tag{11}$$

Чтобы найти v_x, перемѣнимъ въ первомъ изъ уравненій (1) x на $x-1$; тогда получимъ уравненіе:

$$u_{x+1}+2v_x-8u_{x-1}=a^{x-1},$$

откуда найдемъ

$$v_x=\frac{a^{x-1}-u_{x+1}+8u_{x-1}}{2}, \tag{12}$$

куда останется только подставить вмѣсто u_{x+1} и u_{x-1} ихъ значенія, вычисленныя по формулѣ (11), чтобы имѣть v_x выраженнымъ прямо чрезъ x.

184. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ систему совокупныхъ разностныхъ уравненій можно интегрировать по способу, данному д'Аламбертомъ для системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій. Пусть дана система совокупныхъ разностныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{c} u_{x+h}^{(k)}=\sum\limits_{i=1}^{i=m}A_x^{(k,i)}u_x^{(i)}+A_x^{(k)}; \\ [k=1,2,3,\ldots m] \end{array}\right\} \tag{1}$$

помножая эти уравненія на λ_k и суммируя по k отъ 1 до m, получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=m}\lambda_k u_{x+h}^{(k)}=\sum_{i=1}^{i=m}u_x^{(i)}\sum_{k=1}^{k=m}\lambda_k A_x^{(k,i)}+\sum_{k=1}^{k=m}\lambda_k A_x^{(k)}; \tag{2}$$

полагая

$$\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u_x^{(k)} = w_x , \tag{3}$$

мы будемъ имѣть отсюда

$$\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u_{x+h}^{(k)} = w_{x+h} - \sum_{k=1}^{k=m} u_{x+h}^{(k)} \triangle \lambda_k ; \tag{4}$$

внося это во (2), будемъ имѣть:

$$w_{x+h} - \sum_{k=1}^{k=m} u_{x+h}^{(k)} \triangle \lambda_k = \sum_{i=1}^{i=m} u_x^{(i)} \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k A_x^{(k,i)} + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k A_x^{(k)} . \tag{5}$$

Отсюда получится линейное разностное уравненіе 1-го порядка для w_x, если удастся множители λ_k опредѣлить такъ, чтобы было

$$\triangle \lambda_k = 0 \qquad [k = 1 , 2 , , \ldots m] \tag{6}$$

и

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k A_x^{(k,i)}}{\lambda_i} = P_x , \quad [k = 1 , 2 , 3 \ldots m] \tag{7}$$

гдѣ P_x вообще функція одного x, въ частности и постоянная. Уравненія (6) показываютъ, что λ_k суть постоянныя въ смыслѣ § 9; они вмѣстѣ съ P_x должны быть опредѣлены изъ уравненій (7) которыхъ всего m, тогда какъ подлежащихъ опредѣленію изъ нихъ величинъ $m + 1$; это показываетъ, что одинъ изъ множителей λ_k можетъ быть приравненъ любой постоянной, напримѣръ единицѣ; остальныя величины найдутся изъ уравненій (7) такимъ образомъ. Эти уравненія можно такъ представить:

$$\left. \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{k=i-1} A_x^{(k,i)} \lambda_k + (A_{i,i} - P_x) \lambda_i + \sum_{k=i+1}^{k=m} A_x^{(k,i)} \lambda_k = 0 ; \\ [i = 1 , 2 , 3 , \ldots m] \end{array} \right\} \tag{8}$$

такъ какъ они однородны относительно λ_k, то долженъ быть $= 0$ опредѣлитель изъ ихъ коэффиціентовъ:

$$\begin{vmatrix} A_x^{(1,1)} - P_x & A_x^{(2,1)} & \ldots & A_x^{(m,1)} \\ A_x^{(1,2)} & A_x^{(2,2)} - P_x & \ldots & A_x^{(m,2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_x^{(1,m)} & A_x^{(2,m)} & \ldots & A_x^{(m,m)} - P_x \end{vmatrix} = 0 . \tag{9}$$

Это уравненіе степени m относительно P_x, откуда найдемъ m значеній для P_x; выбравъ одно изъ нихъ и внеся въ (8), изъ любыхъ $m-1$ уравненій этой системы мы найдемъ отношенія всѣхъ λ_k къ одному изъ нихъ, который остается произвольнымъ. Принявъ его равнымъ единицѣ, мы удовлетворимъ уравненію (6); если и прочіе λ_k также будутъ удовлетворять этимъ условіямъ (6), то внося ихъ въ (5) будемъ имѣть для опредѣленія w_x линейное уравненіе перваго порядка:

$$w_{x+h} = P_x w_x + Q_x, \tag{10}$$

гдѣ

$$Q_x = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k A_x^{(k)}, \tag{11}$$

послѣ постановки вмѣсто λ_k ихъ найденныхъ значеній. Интегралъ уравненія (10) будетъ заключать одну произвольную постоянную. Если всѣ корни уравненія (9) различны, то поступая точно также съ каждымъ корнемъ этого уравненія, и внося всякій разъ соотвѣтственныя значенія λ_k и w_x въ уравненіе (8), мы будемъ имѣть систему m уравненій первой степени относительно m функцій $u_x^{(i)}$, откуда они найдутся алгебраическимъ путемъ. Эти рѣшенія будутъ полными, ибо будутъ содержать m произвольныхъ постоянныхъ, которыя войдутъ чрезъ посредство каждого изъ w_x.

Для системы уравненій (1) § 182 будемъ имѣть для P_x такое уравненіе.

$$\begin{vmatrix} 0-P_x & a^2x \\ x & 0-P_x \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

или

$$P_x^2 - a^2x^2 = 0, \tag{13}$$

откуда найдемъ

$$P_x = \pm ax. \tag{14}$$

Уравненія (7) (которыхъ (8) суть преобразованія) будутъ для нашего примѣра такія:

$$\frac{\lambda_2 x}{\lambda_1} = \pm ax, \quad \frac{\lambda_1 a^2 x}{\lambda_2} = \pm ax, \tag{15}$$

откуда согласно находимъ

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \pm a, \tag{16}$$

или, принимая

$$\lambda_1 = 1, \tag{17}$$

$$\lambda_2 = \pm a. \tag{18}$$

Уравненіе (10) въ нашемъ случаѣ будетъ такое:

$$w_{x+h} = \pm ax \cdot w_x, \tag{19}$$

[ибо $Q_x = 0$ въ нашемъ случаѣ], откуда по § 149 найдемъ:

$$\left\{\begin{array}{l} w_x = C(+a)^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1), \\ w_x = C_1(-a)^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1). \end{array}\right. \tag{20}$$

Внося въ уравненіе

$$\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x = w_x \tag{21}$$

соотвѣтствующія значенія λ_1, λ_2 и w_x, будемъ имѣть:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x + av_x = C(+a)^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1); \\ u_x - av_x = C_1(-a)^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1), \end{array}\right. \tag{22}$$

откуда получимъ:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = \frac{1}{2}\left[C(+a)^x + C_1(-a)^x\right] \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1), \\ v_x = \frac{1}{2a}\left[C(+a)^x - C_1(-a)^x\right] \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1), \end{array}\right. \tag{23}$$

результатъ согласный съ найденнымъ въ § 182, ибо постоянный множитель $\frac{1}{2}$ можно скрыть въ произвольныхъ постоянныхъ.

Въ случаѣ равныхъ корней уравненія (9) этотъ способъ потребуетъ видоизмѣненія, но мы на этомъ не будемъ останавливаться.

185. Изложенный способъ всегда примѣнимъ къ уравненіямъ съ постоянными коэффиціентами; но для такихъ едва-ли не проще будетъ слѣдующій способъ. Пусть дана система разностныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{x+h}^{(k)} = \sum_{i=1}^{i=m} A_{k,i} u_x^{(i)} + B_k; \\ \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots m] \end{array}\right. \tag{1}$$

гдѣ всѣ $A_{k,i}$ и B_k суть постоянныя. Перемѣняя искомыя функціи на другія, всегда можно сдѣлать такъ, что всѣ B_k исчезнутъ изъ уравненій; дѣйствительно, полагая

$$u_x^{(i)} = v_x^{(i)} + \alpha_i; \tag{2}$$

мы получимъ такую систему уравненій:

Съ помощію, напримѣръ, перваго изъ уравненій (12) найдемъ: для $\lambda_1 = +3$

$$b = a, \tag{16}$$

и для $\lambda_2 = -3$

$$b = -5a; \tag{17}$$

a остается произвольнымъ; потому въ первомъ случаѣ означимъ его чрезъ C, во второмъ чрезъ C_1; тогда полное рѣшеніе системы уравненій (10) будетъ:

$$u_x = C.3^x + C_1(-3)^x;$$
$$v_x = C.3^x - 5C_1(-3)^x.$$

186. Интегрированіе частнаго вида системы совокупныхъ разностныхъ уравненій можетъ служить къ нахожденію коэффиціентовъ при степеняхъ $\cos\varphi$ въ разложеніи по этимъ степенямъ функцій $\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}$ и $\cos m\varphi$; мы покажемъ какъ это дѣлается для первой функціи. Полагая для краткости $\sin\varphi = x$, $\cos\varphi = y$, изъ извѣстной формулы тригометріи:

$$\sin m\varphi = 2y\sin(m-1)\varphi - \sin(m-2)\varphi, \tag{1}$$

давая m значенія $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi &= x\\
\sin 2\varphi &= x(2y)\\
\sin 3\varphi &= x(4y^2-1)\\
\sin 4\varphi &= x(8y^3-4y)\\
\sin 5\varphi &= x(16y^4-12y^2+1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда ясно, что вообще должно положить

$$\sin m\varphi = x(A_m^{(1)}y^{m-1} + A_m^{(2)}y^{m-3} + A_m^{(3)}y^{m-5} + \ldots + A_m^{(k)}y^{m-2k+1} + \ldots), \tag{3}$$

гдѣ при $m = 2p$, послѣдній членъ будетъ $A_m^{(p)}y$, а при $m = 2p+1$ онъ будетъ $A_m^{(p+1)}$. Эту формулу можно короче такъ представить:

$$\sin\varphi = x\sum_{k=1}^{k=m'} A_m^{(k)} y^{m-2k+1}, \tag{4}$$

гдѣ $m' = p = \frac{m}{2}$, когда m четное, и $= p + 1 = \frac{m+1}{2}$, когда оно нечетное. Внося это, равно какъ и получающееся отсюда чрезъ перемѣну m на $m-1$ и $m-2$, въ (1), будемъ имѣть по сокращеніи на x:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\lambda & \cdots & A_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m}-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

найдя изъ этого уравненія для λ m значеній и подставляя каждое изъ нихъ въ (8), мы получимъ m системъ уравненій для опредѣленія a_i, соотвѣтственно каждому значенію λ, откуда, отбросивъ по одному уравненію, какъ слѣдствію остальныхъ въ силу (9), мы найдемъ отношенія $m-1$ величинъ a_i къ одной изъ нихъ, которая останется произвольною; такимъ образомъ мы получимъ m системъ значеній $a_1, a_2, \ldots a_m$; внося ихъ въ (6), для каждой функціи получимъ m значеній, каждое съ одною произвольною постоянною; складывая эти m значеній каждой функціи между собою, получимъ систему полныхъ рѣшеній съ m произвольными постоянными, одними и тѣми же во всѣхъ функціяхъ. Что суммы рѣшеній будутъ тоже рѣшеніемъ—это слѣдуетъ изъ линейности и однородности уравненій (5), въ чемъ читатель легко можетъ убѣдиться самъ. Если бы не всѣ корни уравненія (9) были бы различны, то этотъ способъ потребовалъ бы видоизмѣненія, на чемъ однако мы не будемъ останавливаться, а пояснимъ изложенное примѣромъ.

Пусть дана система уравненій:

$$(10)\qquad \begin{cases} u_{x+1} = 2u_x + v_x \\ v_{x+1} = 5u_x - 2v_x \end{cases}$$

полагая

$$(11)\qquad u_x = a\lambda^x; \quad v_x = b\lambda^x,$$

мы получимъ такія два уравненія:

$$(12)\qquad \begin{cases} (2-\lambda)a + b = 0, \\ 5a - (2+\lambda)b = 0; \end{cases}$$

исключая a и b, будемъ имѣть уравненіе

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(14)\qquad \lambda^2 - 9 = 0,$$

откуда найдемъ два значенія для λ:

$$(15)\qquad \lambda_1 = +3; \quad \lambda_2 = -3.$$

Съ помощію, напримѣръ, перваго изъ уравненій (12) найдемъ: для $\lambda_1 = +3$

$$b = a, \tag{16}$$

и для $\lambda_2 = -3$

$$b = -5a; \tag{17}$$

a остается произвольнымъ; потому въ первомъ случаѣ означимъ его чрезъ C, во второмъ чрезъ C_1; тогда полное рѣшеніе системы уравненій (10) будетъ:

$$u_x = C.3^x + C_1(-3)^x;$$

$$v_x = C.3^x - 5C_1(-3)^x.$$

186. Интегрированіе частнаго вида системы совокупныхъ разностныхъ уравненій можетъ служить къ нахожденію коэффиціентовъ при степеняхъ $\cos\varphi$ въ разложеніи по этимъ степенямъ функцій $\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}$ и $\cos m\varphi$; мы покажемъ какъ это дѣлается для первой функціи. Полагая для краткости $\sin\varphi = x$, $\cos\varphi = y$, изъ извѣстной формулы тригометріи:

$$\sin m\varphi = 2y\sin(m-1)\varphi - \sin(m-2)\varphi, \tag{1}$$

давая m значенія $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, мы получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = x \\ \sin 2\varphi = x(2y) \\ \sin 3\varphi = x(4y^2 - 1) \\ \sin 4\varphi = x(8y^3 - 4y) \\ \sin 5\varphi = x(16y^4 - 12y^2 + 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{2}$$

откуда ясно, что вообще должно положить

$$(3)\quad \sin m\varphi = x(A_m^{(1)}y^{m-1} + A_m^{(2)}y^{m-3} + A_m^{(3)}y^{m-5} + \ldots + A_m^{(k)}y^{m-2k+1} + \ldots),$$

гдѣ при $m = 2p$, послѣдній членъ будетъ $A_m^{(p)}y$, а при $m = 2p+1$ онъ будетъ $A_m^{(p+1)}$. Эту формулу можно короче такъ представить:

$$(4)\qquad \sin\varphi = x\sum_{k=1}^{k=m'} A_m^{(k)}y^{m-2k+1},$$

гдѣ $m' = p = \frac{m}{2}$, когда m четное, и $= p + 1 = \frac{m+1}{2}$, когда оно нечетное. Внося это, равно какъ и получающееся отсюда чрезъ перемѣну m на $m-1$ и $m-2$, въ (1), будемъ имѣть по сокращеніи на x:

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{k=m'} A_m^{(k)} y^{m-2k+1} = 2y \sum_{k=1}^{k=(m-1)'} A_{m-1}^{(k)} y^{m-2k} - \sum_{k=1}^{k=(m-2)'} A_{m-2}^{(k)} y^{m-2k-1};$$

сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней y въ обѣихъ частяхъ равенства, получимъ такую систему уравненій:

$$(6)\qquad \begin{cases} A_m^{(1)} = 2A_{m-1}^{(1)}; \\ A_m^{(2)} = 2A_{m-1}^{(2)} - A_{m-2}^{(1)}; \\ A_m^{(3)} = 2A_{m-1}^{(3)} - A_{m-2}^{(2)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m^{(k)} = 2A_{m-1}^{(k)} - A_{m-2}^{(k-1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

гдѣ m независимая перемѣнная, а

$$(7)\qquad A_m^{(1)},\ A_m^{(2)},\ A_m^{(3)}, \ldots A_m^{(k)}, \ldots$$

неизвѣстныя функціи этой перемѣнной.

Первое изъ нихъ интегрируется какъ линейное перваго порядка безъ послѣдняго члена, и по формулѣ (3) § 151 будетъ:

$$(8)\qquad A_m^{(1)} = C.2^m;$$

чтобы опредѣлить C, положимъ $m=2$ и сличимъ результатъ со вторымъ изъ равенствъ (2); тогда будемъ имѣть:

$$2 = C.2^2,$$

откуда найдемъ $C=\frac{1}{2}$, и внося это въ (8), будемъ имѣть окончательно:

$$(9)\qquad A_m^{(1)} = 2^{m-1}.$$

Перемѣняя здѣсь m на $m-2$ и внося затѣмъ во второе изъ (6), получимъ для опредѣленія функціи $A_m^{(2)}$ слѣдующее линейное уравненіе перваго порядка:

$$(10)\qquad A_m^{(2)} = 2A_{m-1}^{(2)} - 2^{m-3},$$

или, полагая $m-1=x$:

$$(11)\qquad A_{x+1}^{(2)} = 2A_x^{(2)} - 2^{x-2}.$$

Интегралъ этого уравненія получится по формулѣ (12) § 149, полагая тамъ $h=1$, $R_x=-2$, $Q_x=-2^{x-2}$ и $a=1$; мы получимъ тогда по выполненіи всѣхъ дѣйствій:

$$A_x^{(2)} = 2^{x-1}\left\{-\frac{1}{2^2}(x-1)+C\right\}; \tag{12}$$

для опредѣленія C положимъ $x=2$: изъ второй формулы (2) видно, что $A_2^{(2)}=0$, и потому будемъ имѣть такое уравненіе:

$$0 = 2\left\{-\frac{1}{2^2}+C\right\}, \tag{13}$$

откуда найдемъ $C=\frac{1}{2^2}$. Внося это въ (12) и перемѣняя затѣмъ x на m, будемъ имѣть:

$$A_m^{(2)} = -2^{m-3}(m-2). \tag{14}$$

Перемѣняя здѣсь m на $m-2$ и внося результатъ въ третье изъ уравненій (6), будемъ имѣть для опредѣленія $A_m^{(3)}$ слѣдующее линейное разностное уравненіе:

$$A_m^{(3)} = 2A_{m-1}^{(3)} + 2^{m-5}(m-4), \tag{15}$$

или, полагая $m-1=x$:

$$A_{x+1}^{(3)} = 2A_x^{(3)} + 2^{x-4}(x-3). \tag{16}$$

Интегралъ этого уравненія найдется по той же формулѣ (12) § 149, дѣлая тѣже положенія какъ сейчасъ, но только принимая $Q_x=2^{x-4}(x-3)$; будемъ имѣть:

$$A_x^{(3)} = 2^{x-1}\left\{\frac{1}{2^4}\sum_1^x(x-3)+C\right\};$$

но

$$\sum_1^x(x-3)=\sum_1^x(x-3)^{(1)}=\left[\frac{(x-3)(x-4)}{2}\right]_1^x=\frac{(x-3)(x-4)}{2}-3;$$

слѣдовательно

$$A_x^{(3)}=2^{x-1}\left\{\frac{1}{2^4}\frac{(x-3)(x-4)}{2}-\frac{3}{2^4}+C\right\}. \tag{17}$$

Полагая $x=3$ и принимая во вниманіе, что по третьему изъ (2) $A_3^{(3)}=0$, мы будемъ имѣть для опредѣленія C такое уравненіе:

$$0=2^2\left\{-\frac{3}{2^4}+C\right\},$$

или

$$-\frac{3}{2^4}+C=0;$$

на основаніи этого (17) приведется къ такому:

(18) $$A_x^{(3)} = 2^{x-5}\frac{(x-3)(x-4)}{1.2},$$

или перемѣняя x на m:

(19) $$A_m^{(3)} = 2^{m-5}\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}.$$

Перемѣняя здѣсь m на $m-2$ и внося результатъ въ слѣдующее изъ (6) уравненіе, будемъ имѣть для опредѣленія $A_m^{(4)}$ такое уравненіе:

(20) $$A_m^{(4)} = 2A_{m-1}^{(4)} - 2^{m-7}\frac{(m-5)(m-6)}{1.2},$$

или, перемѣняя $m-1$ на x:

(21) $$A_{x+1}^{(4)} = 2A_x^{(4)} - 2^{x-6}\frac{(x-4)(x-5)}{1.2}.$$

Дѣлая въ формулѣ (12) § 149 при прочихъ прежнихъ положеніяхъ $Q_x = -2^{x-6}\frac{(x-4)(x-5)}{1.2}$, мы будемъ имѣть:

(22) $$A_x^{(4)} = 2^{x-1}\left\{-\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{1.2}\sum_1^x (x-4)(x-5)+C\right\};$$

но

$$\sum_1^x (x-4)(x-5) = \sum_1^x (x-4)^{(2)} = \left[\frac{(x-4)^{(3)}}{3}\right]_1^x = \frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{3} + 4.5;$$

потому будетъ

(23) $$A_x^{(4)} = 2^{x-1}\left\{-\frac{1}{2^6}\frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3} - \frac{4.5}{1.2.2^6} + C\right\};$$

такъ какъ по (2) $A_4^{(4)} = 0$, то полагая здѣсь $x=4$, будемъ имѣть:

$$-\frac{4.5}{1.2.2^6} + C = 0,$$

на основаніи чего (23) обратится въ такое:

(24) $$A_x^{(4)} = -2^{x-7}\frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3},$$

или, перемѣняя x на m:

(25) $$A_m^{(4)} = -2^{m-7}\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}.$$

Теперь законъ достаточно ясно обнаружился, чтобы можно было положить

(26) $$A_m^{(n)} = (-1)^{n-1}2^{m-2n+1}\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-2n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

дѣйствительно, полагая здѣсь $n = 1, 2, 3, 4$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} A_m^{(1)} = 2^{m-1}; \quad A_m^{(2)} = -2^{m-3}\dfrac{m-2}{1}; \quad A_m^{(3)} = +2^{m-5}\dfrac{(m-3)(m-4)}{1.2}; \\ A_m^{(4)} = -2^{m-7}\dfrac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}, \end{array}\right\} \quad (27)$$

какъ выше было найдено; остается показать, что формула (26) вѣрна будетъ и для $A_m^{(n+1)}$, разъ она вѣрна для $A_m^{(n)}$. Уравненіе для $A_m^{(n+1)}$ получится, перемѣняя въ общемъ изъ (6) k на $n+1$; будемъ имѣть:

$$A_m^{(n+1)} = 2A_{m-1}^{(n+1)} - A_{m-2}^{(n)}; \quad (28)$$

но перемѣняя въ (26) m на $m-2$, будемъ имѣть

$$A_{m-2}^{(n)} = (-1)^{n-1}2^{m-2n-1}\frac{(m-n-2)(m-n-3)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots(n-1)}, \quad (29)$$

или, короче:

$$A_{m-2}^{(n)} = (-1)^{n-1}2^{m-2n-1}\frac{(m-n-2)^{(n-1)}}{(n-1)!}. \quad (30)$$

Внося это въ (28) и мѣняя $m-1$ на x, мы будемъ имѣть такое разностное уравненіе:

$$A_{x+1}^{(n+1)} = 2A_x^{(n+1)} + (-1)^n 2^{x-2n}\frac{(x-n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}. \quad (31)$$

Дѣлая при прочихъ прежнихъ положеніяхъ въ (12) § 149:

$$Q_x = (-1)^n 2^{(x-2n)}\frac{(x-n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad (32)$$

мы будемъ имѣть:

$$A_x^{(n+1)} = 2^{x-1}\left\{(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\sum_1^x (x-n-1)^{(n-1)} + C\right\}; \quad (33)$$

но

$$\sum_1^x (x-n-1)^{(n-1)} = \left[\frac{(x-n-1)^{(n)}}{n}\right]_1^x = \frac{(x-n-1)^{(n)}}{n} - (-1)^n(2n-1)^{(n-1)},$$

слѣдовательно по внесеніи этого въ (33), будетъ:

$$A_x^{(n+1)} = 2^{x-1}\left\{(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\frac{(x-n-1)^{(n)}}{n!} - \frac{(2n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!2^{2n}} + C\right\}; \quad (34)$$

но полагая здѣсь $x = n+1$ будемъ налѣво имѣть нуль, ибо $A_{n+1}^{(n+1)} = 0$, какъ то видно изъ (4), гдѣ m' достигаетъ лишь половины m или $m+1$; первый членъ выраженія въ скобкахъ тоже обратится въ нуль. и мы будемъ имѣть (отбрасывая множитель 2^n):

$$0 = -\frac{(2n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!2^{2n}} + C;$$

на основаніи этого (34) приметъ окончательно такой видъ:

$$(35) \qquad A_x^{(n+1)} = (-1)^n 2^{x-2n-1} \frac{(x-n-1)^{(n)}}{n!},$$

или перемѣняя x на m и выписывая факторіэль полностью:

$$(36) \qquad A_m^{(n+1)} = (-1)^n 2^{m-2n-1} \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3.4\ldots n},$$

что получается изъ (26), увеличивая n на единицу. Такимъ образомъ формула (26) вѣрною оказывается для всякаго n.

Все, что мы знаемъ о нелинейныхъ разностныхъ уравненіяхъ, а также объ уравненіяхъ съ частными разностями, и уравненіяхъ съ такъ называемыми смѣшанными разностями, т. е. разностно-дифференціальныхъ, носитъ очень частный характеръ и далеко еще отъ того, чтобы представлять такую полную и стройную теорію, какъ теорія линейныхъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ. Такъ какъ эти частности могутъ интересовать значительно меньшій кругъ читателей, то нежелая увеличивать объемъ книги и задерживать ея выходъ изъ печати, мы рѣшились закончить нашъ курсъ статьею объ интегрированіи системъ линейныхъ разностныхъ уравненій съ одной независимой перемѣнной. Читателямъ, которые не пожелали бы ограничиться сообщаемымъ въ нашемъ курсѣ, мы можемъ указать на *Lacroix*: „Traité du calcul differentiel et du calcul intégral.“ in 4⁰ T. III; *Laplace*. Theorie analytique des probalités, гдѣ изложенъ методъ производящихъ функцій, съ помощію котораго выведены почти всѣ формулы разностнаго исчисленія и рѣшено много задачъ; далѣе *Ващенко-Захарченко* „Лекціи разностнаго исчисленія“ Кіевъ 1876 г. и Boole „A treatise on the calculus of finite differences“. Third ed. London 1880. По интегрированію разностныхъ уравненій имѣется составленное по Лакроа, Лапласу и др. „Разсужденіе объ интегрированіи разностныхъ уравненій съ двумя перемѣнными величинами“ кандидата *В. Перевощикова*. Москва 1848. Въ книгѣ Буля читатель найдетъ много литературныхъ указаній, которыя слѣдовало бы дополнить статьями помѣщенными въ русскихъ математическихъ изданіяхъ, многія изъ которыхъ уже цитировались въ нашемъ курсѣ. Въ книгѣ Буля читатель найдетъ также множество примѣровъ для упражненій. Такъ какъ не всѣ изъ нашихъ читателей могутъ достать эту книгу, то мы позволяемъ себѣ присоединить къ нашему курсу нѣсколько заимствованныхъ оттуда примѣровъ для упражненій.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЙ.

I) Найти разности перваго порядка функцій:

$$2^x . \sin\frac{a}{2^x}; \quad \operatorname{tg}\frac{a}{2^x}; \quad \operatorname{cotg}(2^x a).$$

II. Разложить производную факторіэля по факторіэлямъ.

III. Найти разностныя уравненія, которыхъ полные интегралы суть:

1) $u_x = cx^2 + c^2$; отв. $u_x = \frac{\Delta u_x}{2x+1}\left(x^2 + \frac{\Delta u_x}{2x+1}\right)$;

2) $u_x = \left\{c(-1)^x - \frac{x}{2}\right\}^2 - \frac{x^4}{4}$; отв. тотъ же.

3) $u_x = cx + c'a^x$; отв. $\left\{\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{x}{a-1}\right\}\Delta^2 u_x + x\Delta u_x - u_x = 0$.

4) $u_x = ca^x + c^2$; отв. $\left(\frac{\Delta u_x}{a-1}\right)^2 + a^{2x}\left(\frac{\Delta u_x}{a-1} - u_x\right) = 0$.

5) $u_x = c^2 + c\left(\frac{1-a}{1+a}\right)(-a)^x - \frac{a^{2x+1}}{(1+a)^2}$; отв. тотъ же.

IV) Проинтегрировать уравненія перваго порядка:

1) $u_{x+1} - pa^{2x}u_x = qa^{x^2}$; отв. $u_x = Cp^x a^{x(x-1)} + \frac{q}{1-pa} a^{(x-1)^2}$;

2) $u_{x+1} - au_x = \cos nx$; отв. $u_x = Ca^x + \frac{\cos(x-1)n - a\cos nx}{1 - 2a\cos n + a^2}$;

3) $u_{x+1} - u_x \cos ax = \cos a \cos 2a \ldots \cos(x-2)a$;

отв. $u_x = \{C + \operatorname{cosec} a \operatorname{tg}(x-1)a\}\cos a \cos 2a \ldots \cos(x-1)a$.

4) $u_{x+1} - e^{2x-1}u_x = e^{x^2}$; отв. $u_x = Ce^{x(x-2)} + xe^{(x-1)^2}$.

5) $u_{x+1} \sin x\theta - u_x \sin(x+1)\theta = \cos(x-1)\theta - \cos(3x+1)\theta$;

$$\text{отв. } u_x = \frac{2\sin x\theta \sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} + C\sin x\theta.$$

6) $u_{x+1} - au_x = (2x+1)a^x$; отв. $u_x = a^{x-1}\{x^2+C\}$,

7) $(x+1)^2(u_{x+1} - a_x u_x) = a^x(x^2+2x)$;

$$\text{отв. } u_x = a^{x-1}\left\{C + x - \sum\frac{1}{(x+1)^2}\right\}.$$

V) **Проинтегрировать линейныя уравненія высшаго порядка:**

1) $u_{x+2} - 3u_{x+1} - 4u_x = m^x$;

$$\text{отв. } u_x = C(-1)^x + C_1 4^x + \frac{m^x}{(m+1)(m-4)}.$$

2) $u_{x+2} + 4u_{x+1} + 4 = x$; отв. $u_x = C(-4)^x + \frac{5x-26}{25}$.

3) $u_{x+2} + 2u_{x+1} + u_x = x(x-1)(x-2) + x(-1)^x$;

$$\text{отв. } u_x = (C + C'x)(-1)^x + \frac{1}{4}\left[x^3 - 6x^2 + \frac{19}{2}x - 3\right] + \frac{(-1)^x}{6}x^{(3)}.$$

4) $u_{x+2} - 2mu_{x+1} + (m^2+n^2)u_x = m^x$;

$$\text{отв. } u_x = (m^2+n^2)^{\frac{x}{2}}\left\{C\cos\left(x \operatorname{arctg}\frac{n}{m}\right) + C'\sin\left(x \operatorname{arctg}\frac{n}{m}\right)\right\} + \frac{m^x}{n^2}.$$

5) $\Delta u_x + \Delta^2 u_x = x + \sin x$;

$$\text{отв. } u_x = C - \frac{\cos\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

6) $u_{x+4} - 6u_{x+2} + 8u_{x+1} - 3u_x = x^2 + (-3)^x$;

$$\text{отв. } u_x = (-3)^x\left\{C + \frac{1}{192}x\right\} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 +$$

$$+ \frac{x^{(3)}}{960}\left\{4x^2 - 23x + 28\right\}.$$

7) $u_{x+3} - 3u_{x+1} - 2u_x = 0$;

отв. $u_x = (C_0 + C_1 x)(-1)^x + C_2 2^x$.

8) $u_{x+6} + 2u_{x+3} + u_x = 0$;

$$\text{отв. } u_x = C_0 + C_1 x + (C_2 + C_3 x)\cos\frac{\pi x}{3} + (C_4 + C_5 x)\sin\frac{\pi x}{3}.$$

9) $u_{x+2} - 5u_{x+1} + 6u_x = 5^x$;

отв. $u_x = \frac{1}{6} 5^x + C3^x + C_1 2^x$.

10) $\Delta^6 u_{x+1} - 2\Delta^6 u_x = x + 3^x$;

отв. $u_x = \frac{3^x}{64} - \frac{(x+1)^{(7)}}{7!} + C.2^x +$

$+ C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 x^5$.

11) $u_{x+2} \pm 2n^2 u_x = \cos mx$;

отв. $u_x = \frac{\pm n^2 \cos mx + \cos(x-2)m}{n^4 \pm 2n^2 \cos 2m + 1} + X$,

гдѣ $X = C\cos\frac{\pi x}{2} + C_1 \sin\frac{\pi x}{2}$ для верхняго знака,

и $X = Cn^x + C_1(-n)^x$ для нижняго знака.

12) $u_{x+4} \pm 2n^2 u_{x+2} + n^4 u_x = 0$;

отв. $n^{-x} u_x = \left\{C_1 + C_2 x\right\} \cos\frac{\pi x}{2} + \left\{C_3 + C_4 x\right\} \sin\frac{\pi x}{2}$,

или $n^{-x} u_x = C_1 + C_2 x + \{C_3 + C_4 x\}(-1)^x$,

смотря по тому, беремъ ли + или — въ уравненіи.

VI) Проинтегрировать слѣдующія уравненія съ перемѣнными коэффиціентами:

1) $u_{x+2} - x u_{x+1} + (x-1) u_x = \sin x$;

отв. $u_x = \sum \Gamma(x-1)\left\{C + \sum \frac{\sin x}{\Gamma(x)}\right\} + C'$.

2) $u_{x+n-1} + u_{x+n-2} + \ldots + u_{x+1} + u_x = 0$;

отв. $u_x = A\sin\left(\frac{2\pi x}{n} + \alpha\right) + B\sin\left(2\frac{2\pi x}{n} + \beta\right) +$

$+ C\sin\left(3\frac{2\pi x}{n} + \gamma\right) + \ldots + K\sin\left(\frac{n-1}{2}\frac{2\pi x}{n} + \varkappa\right)$

предполагая n нечетнымъ.

3) $u_x = x(u_{x-1} + u_{x-2})$; отв. $u_x = (x+1)!\left\{\sum \frac{C(-1)^x}{(x+2)!} + C_1\right\}$.

4) $u_{x+1} = x(u_x + u_{x-1})$; отв. $u_x = x!\left\{\sum \frac{C(-1)^x}{(x+1)!} + C'\right\}$.

5) $u_{x+2}-2(x-1)u_{x+1}+(x-1)(x-2)u_x=x!$;

отв. $u_x=(x-3)!\left\{C+C'x+\frac{(x-1)(x-2)}{1.2.3}\right\}$.

VII) Проинтенгрировать слѣдующія системы уравненій:

1) $\begin{cases} u_{x+1}+2v_{x+1}-u_x=0, \\ v_{x+1}-2u_x-v_x=a^x; \end{cases}$

отв. $\begin{cases} u_x=(Cx+C'x)(-1)^x-\frac{2a^{x+1}}{(a+1)^2}; \\ v_x=-\left\{C-\frac{C'}{2}+C'x\right\}(-1)^x+\frac{a^x(a-1)}{(a+1)^2}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_{x+1}-v_x=2m(x+1), \\ v_{x+1}-u_x=-2m(x+1); \end{cases}$

отв. $\begin{cases} u_x=C_1+C_2(-1)^x+mx; \\ v_x=C_1-C_2(-1)^x-m(x+1). \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_{x+1}+(-1)^x v_x=0, \\ v_{x+1}+(-1)^x u_x=0; \end{cases}$ отв. $\begin{cases} u_x=C_0+C_1(-1)^x; \\ v_x=C_1-C_0(-1)^x. \end{cases}$

4) $\begin{cases} v_{x+1}-u_x=(l-m)x, \\ w_{x+1}-v_x=(m-n)x, \\ u_{x+1}-w_x=(n-l)x; \end{cases}$

отв. $u_x+\frac{2l-m-n}{3}x=A+\left\{B\cos\frac{\pi x}{3}+C\sin\frac{\pi x}{3}\right\}(-1)^x$;

уравненія для v_x и w_x получатся отсюда, перемѣнивъ во второй части x на $x+2$ и $x+4$.

5) $\begin{cases} u_{x+2}+2v_{x+1}-8u_x=a^x, \\ v_{x+2}-u_{x+1}-2v_x=a^{-x}; \end{cases}$

отв. $u_x=(A+Bx)2^x+(C+Dx)(-2)^x+\frac{a^{x+2}-2a^x-2a^{-x-1}}{(a^2-4)}$,

а v_{x+1} (и слѣдовательно v_x) сразу получатся изъ перваго уравненія.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*стрк.*	*напечатано:*	*должно быть:*
5	18	$\frac{u''_x}{1.2}+$	$\frac{u''_x}{1.2}h^2+$
11	1	(5)	(3)
12	12	функціи	функція
14	5	$\Delta^2 x^{(m\|h)}$	$\Delta^2 x^{(-m\|h)}$
»	»	$x^{(m-2\|h)}$	$x^{(-m-2\|h)}$
»	7	$\Delta^k x^{(m\|h)}$	$\Delta^k x^{(-m\|h)}$
16	7	x^{m-k}	$x^{(m-k\|h)}$
»	13	h^k	h^{m-k}
17	11	$(x-\overline{m-1}h)$	$(x-\overline{m+1}h)$
»	21	,	;
»	»	$(y+\overline{p-m-1}h)$	$(y+\overline{p-m-1}h)$
19	1	(9)	(11)
20	16	v_{k+h}	v_{x+h}
21	3	$\Delta^n a^x (a^h-1)^n$,	$\Delta^n a^x = a^x(a^h-1)^n$,
23	17	разности	разностей
»	18	разностей	разности
25	23	$\Delta \mathrm{arctg} =$	$\Delta \mathrm{arctg}\, x =$
27	10	Δ_{x+kh}	Δu_{x+kh}
28	24	(ея первый	(первый
31	22	(5)	(4)
32	8	формула (7)	формула (7) § 31
»	26	$u_x+\Delta u_{x+h}+$	$u_x+\Delta u_x+\Delta u_{x+h}+$
33	19	со второй	съ первой
35	18	$-C^q_{p+1}$,	$-C^p_{p+1}$,
36	4	(9),	(9) пред. §,
»	18	Δu_{x+kh}	$\Delta^m u_{x+kh}$
39	7	$=\Delta^m u_{x+\overline{n-m-1}h}-$	$=\Delta^m u_{x+\overline{n-m}h}-$
40	8	$-C^{n-1}_{m-2}$;	$-C^{n-1}_{m+2}$;
»	9	C^{n+1}_{m+2}	C^{n-1}_{m+2}
»	16	(10)	(5′)
41	2	(11)	(6′)

II.

Стрн.	*стрк.*	*напечатано:*	*должно быть:*
42	4	C_2^{k+1}	C_2^{k+2}
»	6	$C_{n-m-k-1}^{n-m+1}$	$C_{n-m-k-1}^{n-m-1}$
49	17	(*противъ формулы поставить пропущенный №*)	(1)
50	11	$\int_0^1 (u^{(m+1)}_{x+h-hz} h dz$	$\int_0^1 u^{(m+1)}_{x+h-hz} h dz$
»	»	$\Delta u_x^{(m)})$.	$\Delta u_x^{(m)}$.]
»	13	и складывая, получимъ такой результатъ:	и складывая съ (1), получимъ по сокращеніи такой результатъ:
51	»	$n^{(m+1)}_{x+h-h\theta}$	$u^{(m+1)}_{x+h-h\theta}$
52	14	$a_{3,4}h^4u_x^{(IV)}+a_{3,m}h^m u_x^{(m)}+$	$a_{3,4}h^4u_x^{(IV)}+\ldots+a_{3,m}h^m u_x^{(m)}+$
53	7	z^m	$z^m\ldots$
»	13	$\frac{1}{(m+1)!}$	$\frac{z^m}{m!}$
54	4	h	z
56	13	$++$	$+$
59	25	значеніемъ	значеніямъ
60	28	перемѣной	перемѣнной
61	15	факторіелямъ	факторіэлямъ
63	4	Sphärisehen	Sphärischen
67	1	n_x	u_x
68	7—10	[*вычеркнуть* h *въ знаменателяхъ коэффиціентовъ формулы* (4)]	
»	13	$X-h$	$X-x$
69	2	$=3$	$=4$
»		[*между 19 и 20 пропущены слѣдующія двѣ строчки:* $\times\frac{X-x}{h}=0,5$ / $+8^\circ 38'12'',9$]	
70	1	$=\frac{1}{2}$	$=-\frac{1}{2}$
72	3	$\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k+1}h}$	$\Delta^{2k-1}u_{x-\overline{k-1}h}$
73	14	полусуммы изъ тѣхъ значеній	полусуммы тѣхъ значеній
75	3	x	X
»	8	все растетъ,	все растетъ или все убываетъ,
76	17	$7^\circ 22'10'',3$	$7^\circ 22'10'',4$
»	»	$24'26'',5$	$24'26'',9$
77	9	$-0,01401$.	$-0,24650$.
»	10	$=5,01640c=5^c0^{`}23'36'',9$;	$=5,013814=5^c0^{`}19'53'',5$;
81	2	$\sum_{i=0}^{i=n} k_i^k$	$\sum_{i=0}^{i=n} x_i^k$
»	2	$a_2\sum_{i=0}^{i=n} x_i^{k+1}$	$a_2\sum_{i=0}^{i=n} x_i^{k+2}$
82	13	a_1x^2	a_2x^2
»	18	изъ (3),	изъ (3) пред. §,

Стрн.	*стрк.*	*напечатано*:	*должно быть*:
83	5	$a_i x_i^k u_i$	$a_k x_i^k u_i$
88	8	(3) пред. § и	(3) и
89	16	$F(x)$,	$F(x)$ степени m,
91	9	на слѣдующій,	на слѣдующій съ измѣненнымъ знакомъ,
„	22	θ_{n-2}	$\theta_{n-2}(x)$
„	27	$a_3 f_1(x)$	$a_3 \varphi_1(x)$
„	32	$a_{n+1}\theta_{n-1}(x)=$	$\theta_{n-1}(x)=$
92 [*формула* (5)]	2	$a_2(x-b_2)$	$a_2(x-b_3)$
„	11	$a_2(x-b_2)$	$a_1(x-b_2)$
93	5	$\varphi_{m-1}(x)(x-b_m)a_m\varphi_{m-2}(x)$	$\varphi_{m-1}(x)(x-b_m)-a_m\varphi_{m-2}(x)$
94	9	...3,2,	...3,2,1,
„	11	предыдущему §	предыдущаго §
96	10	въ (7)	въ (1) § 72,
97	4	неравенство (14)	равенство (6) пред. §
99	11	(0,1)	(1,1)
100	1	[*равенства* (9) *замѣнить такими*:] $(1,1)=(0,2)-b_1(0,1)$ $(1,2)=(0,3)-b_1(0,2)$ $(1,3)=(0,4)-b_1(0,3)$ . . . . $(1,k)=(0,k+1)-b_1(0,k)$	
101	17	$=n$	$i=n$
103	9	членомъ ко	членомъ
109	16	$-u_x$.	$-u_{x,y}$.
„	23	будемъ	будетъ
110	7	$\Delta_x\Delta_y u_{xy}=\Delta_y u_{x+k,y}-\Delta_{x,y}$	$\Delta_x\Delta_y u_{x,y}=\Delta_y u_{x+h,y}-\Delta_y u_{x,y}$
„	11	Δu_x	$\Delta_x u_{x,y}$
„	12	u_x,	$u_{x,y}$,
„	14	u_x,	$u_{x,y}$,
114	5	$u_{x,y,h}$	$u_{x,y,z}$
„	6	$\frac{\partial^2 u_{x,h,z}}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 u_{x,y,z}}{\partial y^2}$
115	10	которыя	которые
120	7	предѣламъ	предѣломъ
„	25	(1)	(2)
123	5	подъ	надъ
125	послѣдняя	$\Delta_{x+\overline{\lambda-1}h}$	$v_{x+\overline{\lambda-1}h}$
127	послѣдняя	$\frac{x^{(m+1\|h)}}{m+1}+C$,	$\frac{x^{(m+1\|h)}}{(m+1)h}+C$,
128	6	(2)	(3)
„	18	94.	98.
132	16	$x^{(n\|h)}$	$x^{(n)}$
„	20	$\sum x^{(n\|h)}$	$\sum x^{(n)}$
„	27	§ 17	§ 19

IV.

Стрн.	*стрк.*	*напечатано:*	*должно быть:*
134	5	въ § :	въ § 22:
140	1	ae^{ih}	$a^h e^{ih}$
[*въ формулѣ* (3)]			
144	4	отъ (2) во второй	отъ (2)—во второй
„	23	$(-1)^{n-3}C_2^{n-2}$	$(-1)^{n-3}C_2^{n-1}$
„	„	$(-1)^{n-2}C_2^{n-1}$	$(-1)^{n-2}C_2^{n}$
„	24	$(-1)^n\sum^{(3)}\left(\sum^{(n)x+nh}u_x\right)\Delta v_x.$	$(-1)^n\sum^{(3)}\left(\sum^{(n)x+nh}u_x\right)\Delta^n v_x.$
148	23	Tluxion	Fluxion
150	15	функцій ((3) предыдущаго §) (4) видно,	функціи ((3) предыдущаго §) видно,
„	20	(7)	(3)
158	28	отъ A_1 до A_2	отъ 1 до A_2
„	2 снизу	$z=1$	$z=1$,
169	8	lz	dz
170	12	$\overline{2}$	$\frac{1}{2}$
174	18	§ 131	§ 130
179	21	$\varphi(u,p+1)$	$\varphi(z,p+1)$
184	8	$m+1=$го	$m+1$-го
191	15	извѣстные	извѣстныя
199	3	$\log(1-P_x$	$\log(1-P_x)$
204	1, 3, 5, 15, 17 и 19	h	1
„	3	u_x	w_x
„	15, 17, 19	a^{-x}	a^{-x-1}
209	19	$Q=0$,	$Q_x=0$,
224	11, 15	$A_0a^{\frac{x}{h}}$	$A_0a^{\frac{x}{h}+n}$
225	6	$f''(a),\ldots f^{(m-1)}(a)$,	$f''(a)=0,\ldots f^{(m-1)}(a)=0$,
228	8	$(C_k+C_k')i$	(C_k+C_k')
„	18	кратной	m-кратной
235	10	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$
236	5	$=\cos\beta x.\cos\beta$	$=2\cos\beta x.\cos\beta$
238	4	m):	m,)
240	2 (снизу)	$\geqq$	$>$
241	1 и 3	$\leqq$	$<$


QA 281 .T5 C.1
Kurs teorii konechnykh raznost
Stanford University Libraries
3 6105 034 769 609
ks of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

